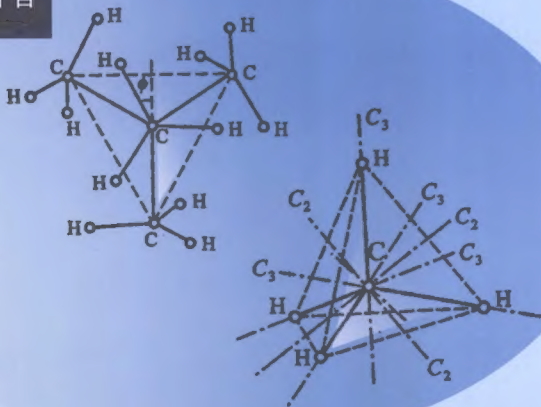


浙江省重点专业资助项目
杭州市重点学科资助项目

QUN DE JIEGOU YU DUICHENXING

群的结构与对称性

陈辉 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

QUN DE JIEGOU YU DUICHENXING

ISBN 978-7-108-06443-9



9 787308 064439 >

定价: 37.00元

浙江省重点专业资助项目

杭州市重点学科资助项目

群的结构与对称性

陈 辉 著

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

群的结构与对称性 / 陈辉著. —杭州: 浙江大学出版社,
2008.12

ISBN 978-7-308-06443-9

I. 群… II. 陈… III. 群论 IV. 0152

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 199078 号

群的结构与对称性

陈 辉 著

责任编辑 阮海潮(ruan100@yahoo.cn)

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

<http://www.press.zju.edu.cn>)

电话: 0571-88925592, 88273066(传真)

排 版 杭州中大图文设计有限公司

印 刷 德清县第二印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 19

字 数 430 千

版 印 次 2008 年 12 月第 1 版 2008 年 12 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-06443-9

定 价 37.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

内 容 简 介

群论自 19 世纪由 Galois 创立以来,不仅成为近代代数的重要分支,而且其应用范围已深入到科学技术的各个领域,尤其是自然科学的物理、化学和生物的研究中,群论已成为必不可少的强有力的数学工具。对称性是自然界最普遍、最重要的特性,自然界的所有重要的规律均与某种对称性有关,甚至所有自然界中的相互作用,都具有某种特殊的对称性。虽然对称的概念看来是很明显的,但为了给对称这个概念一个精确的和一般的描述,特别是对称性的量上的计算,却需要利用群论这个工具。本书系统地介绍群的对称性及其应用。

全书共分七章,对称与群初步、群的对称性与群的结构、群表示论基础、代数方程的对称性、物理学中的对称群、分子对称群及 Lie 群结构的对称性。其中群与群的表示理论是本书的基础。

本书着眼于方法论的阐述,不仅引入概念,阐述理论,而且附有大量的应用实例,涉及了数学、物理学、化学、材料科学和工程技术各方面,使读者领悟群的对称性的科学含义及广泛应用背景。

前 言

群论自 19 世纪由 Galois 创立以来,不仅成为近代代数的重要分支,而且其应用范围已深入到科学技术的各个领域,尤其是自然科学的物理、化学和生物的研究中,群论已成为必不可少的强有力的数学工具。

客观世界普遍存在各种各样的对称性,而群论正是描述、反映和研究对称性的数学武器,因此从其诞生至今,就存在一个由纯粹数学领域扩展到其他自然科学领域的必然现象。Galois 利用群的对称性证明了五次或五次以上的代数方程不能通过初等代数方法求得方程的精确解。

20 世纪,传统群论与现代拓扑学、流形的概念相结合,形成拓扑群的新理论。就在群论不断发展不断现代化的过程中,我们看到许多群论大师,如 E. Cantan、H. Weyl、G. Racah、E. P. Wigner 等同时又是物理学大师。群论迅速在量子力学、光谱学、角动量理论、原子核谱等物理学领域得到广泛应用。

对称性是自然界最普遍、最重要的特性。《可怕的对称》一书的作者认为,上帝是按照“对称”的美学思想来设计自然的。

近代科学表明,自然界所有重要的规律均与某种对称性有关,甚至所有自然界中的相互作用,都具有某种特殊的对称性——所谓“规范对称性”。实际上,对称性研究的日趋深入,已越来越广泛地应用到物理的各个分支:量子论、高能物理、相对论、原子与分子物理、晶体物理、原子核物理,以及化学(晶体的分类、分子轨道理论、配位场理论等)、生物(DNA 的构型对称性等)和工程技术。

虽然对称的概念看来是很明显的,但为了给对称这个概念一个精确的和一般的描述,特别是对称的性质的量上的计算,却需要利用群论这个工具,我们强调“对称即群”的观点。

在 1890 年, Federov 和 Schoen Files 就利用群的对称性系统解决了晶体结构分类问题, 证明了具有周期性排列的空间点阵总共有 230 种, 使人大开眼界. 1893 年, 挪威科学家 Sophus Lie 和 Scheffer 将群论与微分方程结合起来, 使有限群的概念扩展到无限群、连续群, 导致现代李群的建立.

20 世纪 50 年代末到 60 年代中期, 在基本粒子研究中, $SU(3)$ 理论、夸克模型等的巨大成功, 形成了群论向其他学科“普及”的一次热潮. 时至今日, 群对称性的应用领域不仅遍及物理学各个领域, 而且扩展到化学、生物、材料科学、流体力学、机械、电工学等等.

群与群的表示理论是本书的基础, 在讨论时我们选择一些较深入的内容, 对群论, 选择 Sylow 定理、有限交换群的结构定理和 Galois 理论等. 好的数学思想是一定会在不同场合下重复出现的, 使初学者能看到这些重复是有益的. 在本书中分解型结构思想重复出现在有限交换群的结构定理中, Galois 对应思想重复出现在 Galois 理论中.

由于教学的需要, 不过于追求数学理论的完备与严格, 尽可能从大家较为熟悉的具体事例出发, 阐述有关概念; 尽可能多地列举应用实例. 本书的应用实例, 涉及了数学、物理学、化学、材料科学和工程技术各方面. 本书着眼于方法论的阐述, 希望能起到举一反三的效果, 以帮助读者在群论与对称之间架起一座桥梁.

本书的特点是, 不仅引入概念, 阐述理论内容, 还附有大量例题, 提出问题, 这是很重要的. 相对独立地解决这些问题, 一定会使读者对基础内容有较深刻的理解. 为便于读者领悟群的对称性的科学含义及广泛应用背景, 同时所有问题中, 凡是需要提示的地方, 尽量给予详尽提示.

在本书编写过程中, 我的学生陈晓玮做了大量工作, 给我以很大的帮助, 在此表示感谢.

陈 辉

目 录

| | |
|---------------------------|--------|
| 第 1 章 对 称..... | (1) |
| § 1.1 图形的对称 | (1) |
| § 1.2 对称变换 | (3) |
| § 1.3 平面运动 | (8) |
| § 1.4 对称变换群 | (11) |
| 第 2 章 群的结构..... | (17) |
| § 2.1 群 | (17) |
| § 2.2 置换群 | (23) |
| § 2.3 群的重排定理、正规子群和商群..... | (28) |
| § 2.4 群的置换表示理论初步 | (38) |
| § 2.5 有限群的 Sylow 定理 | (43) |
| § 2.6 有限交换群的结构 | (47) |
| § 2.7 有限群分类初步 | (52) |
| § 2.8 可解群 | (57) |
| § 2.9 幂零群与超可解群 | (62) |
| § 2.10 群的构造..... | (67) |
| § 2.11 交换群的结构..... | (73) |
| § 2.12 群对称性的应用..... | (77) |
| 第 3 章 群表示论..... | (84) |
| § 3.1 结合代数 | (84) |

| | | |
|--------------|---------------------------|--------------|
| § 3.2 | 有限维代数 | (90) |
| § 3.3 | 半单代数的对称性 | (94) |
| § 3.4 | 有限结合代数的表示 | (101) |
| § 3.5 | 群表示初步 | (105) |
| § 3.6 | 群的特征标 | (114) |
| § 3.7 | 群的特征标表 | (122) |
| § 3.8 | 群的特征标的例子 | (126) |
| § 3.9 | 有限群特征标理论的应用 | (132) |
| § 3.10 | 有限群的不等价不可约表示 | (137) |
| § 3.11 | 直积群的表示 | (142) |
| 第 4 章 | 物理学中的对称群 | (148) |
| § 4.1 | Wigner-Eckart 定理 | (148) |
| § 4.2 | Wigner-Eckart 定理的应用 | (150) |
| § 4.3 | 对称群的标准表示 | (155) |
| § 4.4 | 对称群表示的约化 | (160) |
| § 4.5 | Young 对称子及应用 | (165) |
| 第 5 章 | 分子对称群 | (175) |
| § 5.1 | 简单的分子对称群 | (175) |
| § 5.2 | 空间的对称性 | (183) |
| § 5.3 | 晶格的对称性 | (188) |
| § 5.4 | 点 群 | (191) |
| § 5.5 | 晶体点群 | (198) |
| 第 6 章 | Galois 群及其应用 | (208) |
| § 6.1 | 代数方程解法概述 | (208) |
| § 6.2 | Galois 基本定理 | (212) |
| § 6.3 | 自同构群 | (224) |

| | | |
|--------------|---------------------------|--------------|
| § 6.4 | 方程有根式解的判别方法 | (227) |
| § 6.5 | Galois 群与用根号解代数方程 | (233) |
| § 6.6 | 尺规作图问题 | (237) |
| 第 7 章 | Lie 群的结构与对称性 | (246) |
| § 7.1 | 群代数和群流形 | (246) |
| § 7.2 | 拓扑群及其表示 | (250) |
| § 7.3 | $L_2(G)$ 空间 | (257) |
| § 7.4 | Lie 群与 Lie 代数 | (263) |
| § 7.5 | Lie 群的对称性 | (270) |
| § 7.6 | 伴随变换与伴随表示 | (274) |
| § 7.7 | Lie 群的 Carran 分解 | (282) |
| § 7.8 | 伴随变换的轨几何 | (290) |
| 参考文献 | | (295) |

也许这就是为什么正方形更对称的解释. 用使图形回到自身的所有运动来刻画该图形的对称应该是自然的, 也符合我们对对称的直观感觉. 例如, 经过绕中心的任意旋转以及以任何过中心的直线为轴的反射都能回到自身, 正方形绕其中心旋转 $\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ 或以其对角线和对边中点连线的反射才能回到自身, 而矩形就更少了, 它只有绕其中心旋转 2π 才能回到自身, 因此所谓对称是与变换联系在一起的.

例 1.1.1 两端无限延伸的直线, 上有等距离 d 的刻度 (如图 1.1).

当直线向左或向右平行移动 d 的整数倍时, 将与自身直线重合, 不变性. 直线对任刻度 P 或两相邻刻度 P 的中点进行反射, 仍与自身直线重合, 故该直线具有等距离 d 的整数倍的平移对称性和相对刻度 P (中点 P) 的反射不变性.



图 1.1 有等距离刻度的无限直线

例 1.1.2 等边三角形和直圆柱体 (如图 1.2).

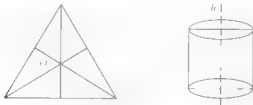


图 1.2

能使图形复原的变化, 称为该图形的对称变换或对称操作. 等边三角形的全部对称操作是, 绕中心 O 转动角 $2\pi/3$ (不动, $2\pi/3, 4\pi/3$), 关于每个角平分线的反射 (常记为 m_a, m_b, m_c).

直圆柱体的全部对称操作是, 绕圆柱轴线, 转动任意角度 (有无穷多个操作); 转动后, 再相对于圆柱的中心 O 反面, 相对于过轴线, 且任一平面的反射, 绕 O 中心 O 且垂直于轴线的任一直线转动角 π .

定义 1.1.2 平面中一个图形 S 的对称变换是指平面内具有性质 $T^{-1} = S$ 的恒距变换 T . (后面还要详细讨论)

平面中一个图形的对称变换类可包括旋转 + 移, 反射. 面的一种对称变换的任意复合都正好还是这一种的某一种. 复合中的定义中的几何算符铺陈一个平面图形的所有对称变换的复合还是这个图形的对称变换, 此为群论定义中的封闭性性质.

绕轴旋转为一种特殊对称变换,实际对应着群定义中的单位元.而对称中的反对称,是群定义中的逆元.

定义 1.1.3 一个平面图形的对称变换群是指其中的所有对称变换的集合.

此定义不是抽象群的描述,但作为群论学习的前奏,非常自然,且与后续群的“变换群”相呼应.

例 1.1.3 如图 1.3,所示的三角形,具有 120° 、 240° 的一个旋转,因而构成了一个三阶对称变换群,实际上是一个循环群.又如图所示的太阳八角星,具有八个旋转和八个反射,组成了二面体群 D_8 .



图 1.3

【问题】 将图 1.3 中的三角形内的字母“a”移走,这是一个阶对称变换群吗? 将图 1 中的八个角内各插入一个字母“a”,情况会怎样呢?

定义 1.1.4 带型图案是指轴对称,且至少具有形式 nV 的图案,其中 n 是整数, V 是固定向量.



图 1.4

【思考】 分析图 1.4 中的带型对称图案

§ 1.2 对称变换

定义 1.2.1 一个 A 到 A 的映射叫做 A 的一个变换.

一个 1 到 1 的满射(单射或 1 到 1 的)映射叫做 1 的一个满射变换、单射变换或一一变换.

变换,尤其是 1 变换,也是近代数学中极重要的概念.

例 1.2.1 $1 = \angle, l, x \mapsto \angle', l', x'$, \angle 是偶数, $\mapsto \angle'$, \angle 是奇数,是 1 的一个满射变换.

例 1.2.2 $A=\mathbb{R}, f: x \mapsto e^x$ 是 A 的一个单射变换.

例 1.2.3 $A=\{1, 2, 3\}, B=\{a, b, c\}$

$$f: 1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c,$$

$$f^{-1}: a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3$$

都是 A 的——变换

但现在为便利起见, 对于变换这种特殊的映射要用一种特殊的符号来说明, 我们约定符号

$$\tau: 1 \mapsto a, 2 \mapsto b,$$

当然不是 τ 的 τ 次方的意思, 因为 τ 字是一个变换, τ 的 τ 次方根本没有什么意义, 这只是一个符号, 正如我们对一特殊的映射 (代数) 算, 及关系都用特殊符号一样. 集合 A 在一般情形之下当然可以有若干不同的变换, 我们再举一个简单例子

例 1.2.4 $A=\{1, 2\}$,

$$\tau: 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2$$

$$\tau_2: 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2$$

$$\tau_3: 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2$$

$$\tau_4: 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1$$

是 A 的所有的变换, 其中 τ_3, τ_4 是——变换.

现在我们把给定的 A 集合 A 的全体变换放在一起, 组成一个集合

$$S=\{\tau, \lambda, \mu, \dots\}$$

我们想要去定义一个 S 的代数运算, 这个代数运算我们把它叫做乘法. 我们在 S 的两个元 τ 和 λ ,

$$\tau: a \mapsto a', \lambda: a \mapsto a''$$

那么, $\tau \circ \lambda$ 显然也是 S 的——变换, 因为给了 S 中任意元 a , 我们 τ 以得 a' , 个即 λ 以 a' 求. 现在我们规定, 就把这个变换叫做 $\tau \circ \lambda$ 的乘积

$$\tau \lambda: a \mapsto (a')' = a''$$

这样, 这个乘法是一个 S 的代数运算. 我们举一个例子

例 1.2.5 我们在例 1.2.4 里取 S 的变换本符号 τ_2, τ_3 的乘积

$$\tau_2 \tau_3: 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2, \text{ 所以 } \tau_2 \tau_3 = \tau_2;$$

$$\tau_3 \tau_4: 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, \text{ 所以 } \tau_3 \tau_4 = \tau_1.$$

我们说, 如上规定的乘法适合结合律: $\tau(\lambda\mu) = (\tau\lambda)\mu$.

因为 $\tau(\lambda\mu): a \mapsto (a'')' = ((a')')' = ((a'')')'$,

对于这个乘法来说, 有一个单位元, 就是 S 的恒等变换 $\varepsilon: a \mapsto a$.

因为 $\varepsilon \tau: a \mapsto (a')' = a', \tau \varepsilon: a \mapsto (a'')' = a', \varepsilon \tau = \tau, \tau \varepsilon = \tau$.

这样, τ 对于这个乘法来说也是满足乘法适合结合律, 有单位元. 下面我们考虑 A 中的元是否都有逆元.

例 1.2.5 取 $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 把一个任意的实数 x 映成 τx , $\tau x = 1/x$, $x \neq 0$, 这就是说, τ 是 \mathbb{R} 中哪一个变换, $\tau x = e$, 也就是 $e = 1$, 没有逆元.

我们取 τ 为 \mathbb{R} 上的一个变换, 记为 $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 \mathbb{R} 中每一个元都有逆元.

定理 1.2.1 集合 A 中的元 τ 是变换构成的集合, 对于上面规定的乘法, 乘法适合结合律, 有单位元, 并且每一个元都有逆元.

证明 首先说明 G 对乘法是封闭的.

i. 假如 τ, λ 是 \mathbb{R} 变换, 那么 $\tau\lambda$ 也是 \mathbb{R} 变换.

因为 τ 在 \mathbb{R} 中映 \mathbb{R} 中任意的元 a 到 τa , λ 在 \mathbb{R} 中映 τa 到 $\tau\lambda a$, 所以在 \mathbb{R} 中有 $\tau\lambda a$, 有以下性质,

$$\lambda: b \rightarrow a = b^a,$$

由于 τ 是 \mathbb{R} 变换, 在 A 里有 c 有以下性质,

$$\tau: c \rightarrow b = c^b,$$

这样, $\tau\lambda: c \rightarrow (c^b)^a = b^a = a$,

$a, \tau\lambda a$ 是 \mathbb{R} 中任意的元, 所以 $\tau\lambda$ 是 \mathbb{R} 中任意的元, 所以 $\tau\lambda$ 是 \mathbb{R} 变换.

ii. 结合律对于一般的变换都成立, 所以 $\tau\lambda$ 对于 \mathbb{R} 变换也成立.

iii. e 是 \mathbb{R} 变换, 是单位元.

iv. 设 τ 是 \mathbb{R} 中任意的变换, 那么存在一个 \mathbb{R} 变换 λ , 有以下性质,

$$\lambda: a \rightarrow a^a, \text{ 假如 } (a^a)^a = a,$$

所以 $\lambda\tau: a \rightarrow (a^a)^a = a$, 即 $\lambda\tau = e$, 称 λ 为 τ 的逆变换, 记为 $\lambda = \tau^{-1}$.

例 1.2.6 设 $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 取 $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda: x \rightarrow ax + b$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, 对于变换的乘法满足上面四个条件.

证明 i. 设 $f_{a,b}, f_{c,d} \in G$, 那么 $f_{a,b} \circ f_{c,d} \in G$.

λ 为在 \mathbb{R} 中取一个任意的元 x , 由于 λ 是 \mathbb{R} 变换, 在 \mathbb{R} 中有 λ 有以下性质,

$$f_{c,d}: x \rightarrow cx + d,$$

$$f_{a,b}: cx + d \rightarrow a(cx + d) + b = acx + (ad + b),$$

这样,

$$f_{a,b} \circ f_{c,d}: x \rightarrow acx + (ad + b),$$

ii.

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac, (ad+b)},$$

ii. 结合律对于一般的变换都成立;

iii. 显然 $e: x \rightarrow x$ 是单位元;

iv. 任意 $f_{a,b} \in G$, 设 $f_{a,b}$ 是其逆变换,

则 $\varepsilon = f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac, (ad+b)} =: x \mapsto acx + (ad+b)$, 那么 $ac=1, ad+b=0$,
解之得, $c=1/a, d=-b/a$, 所以 $f_{1/a, -b/a}$ 是 $f_{a,b}$ 的逆元.

定义 1.2.2 一个有限集合上的一个置换叫做一个置换

例 1.2.7 $A = \{1, 2, 3\}$,

$$f: 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 3;$$

$$f: 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 2;$$

$$f: 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 3;$$

$$f: 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2;$$

$$f: 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1;$$

$$f: 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 1;$$

$$f: 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2.$$

记为 $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

以上的表示方法不仅是一个符号, 因为于给定了 n 个数字的次序排列, 这样个符号都能具体地告诉我们, 它用什么样的置换, 换句话来说, 它告诉我们, 我们给定的 n 个元素, 究竟怎么的象是排列, 我们, 看它, 看它, 找到, 然后看它底下是一个什么数字就行了, 因此, 利用这种符号可以直接来计算两个置换的乘积. 我们举一个例.

定理 1.2.2 含有 n 个元素的任意集合共有 $n!$ 个置换

证明 设 $M = \{1, 2, \dots, n\}$, 则对 M 中 n 个元素, 都能确定元素 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 i_1, i_2, \dots, i_n , 反之, 元素 $1, 2, \dots, n$ 的一个全排列都确定 M 的一个双射变换, 由于不同的排列确定不同的双射变换, 因此, n 个元素有多少个全排列, M 就有多少个双射变换. 由于 n 个元素共有 $n!$ 个全排列, 故 M 共有 $n!$ 个双射变换.

定义 1.2.3 一个置换把 a_1 变成 a_2 , a_2 变成 a_3 , a_3 变成 a_4 , a_4 变成 a_5 , 而其余元素保持不变的置换, 叫做一个循环置换

这样一个置换我们用符号 (i_1, i_2, \dots, i_k) 来表示.

$$\text{例如: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 4); \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

一个任意的置换当然不一定是个循环置换.

例如, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, 就不是一个循环置换, 实际上它是两个循环置换的乘

积:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{array} = (2\ 3)(4\ 5).$$

一般来说,我们有

定理 1.2.3 每一个 n 元置换 π 都可以写成若干个没有共同数字的、不相交的循环置换的乘积.

证明 我们首先消去 π 中使任何元变动的项,就是当 π 是恒等置换的时候,定理是对的.

假定 π 中最多变动 i_1, i_2, \dots, i_r 个元.由一个元变一个元是对角.现在我们看一个变动,个元的 π ,我们任意取一个被 π 变动的 i_1 ,从 i_1 出发我们找 π 的象 i_2 , i_2 的象 i_3 , ... 这样找下去,直到我们第一次找到一个 i_s 为止,这个 i_s 的象不再是一个新的元,而是我们已找过的元 i_1 ,即 $i_s \pi = i_1$, $i_1 \pi = i_2, \dots, i_{s-1} \pi = i_s$, 因为 i_1 中只有 r 个元,这样的 i_s 是一定存在的.我们说, $(i_1 i_2 \dots i_s) \pi = i_1$.

因为 i_1, i_2, \dots, i_s 已经是 i_1 的象,所以不能再是 i_1 的象,这样,我们得到

$$i_1 \pi = i_2, i_2 \pi = i_3, \dots, i_{s-1} \pi = i_s,$$

因为 π 中使 i_1, i_2, \dots, i_s 变动的 $k < r$. 假如 $k = r$, π 本身已经是一个循环置换,我们用不着再证明什么;假如 $k < r$, 有

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_r & i_{r+1} & \dots & i_n \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 & i_{k+1} & \dots & i_r & i_{r+1} & \dots & i_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_r & i_{r+1} & \dots & i_n \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 & i_{k+1} & \dots & i_r & i_{r+1} & \dots & i_n \\ i_3 & i_4 & \dots & i_2 & i_{k+1} & \dots & i_r & i_{r+1} & \dots & i_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_r & i_{r+1} & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_r & i_{r+1} & \dots & i_n \\ i_{r+1} & i_{r+2} & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_r & i_{r+1} & \dots & i_n \end{bmatrix} \\ &= (i_1 i_2 \dots i_k) \pi_1 \dots \end{aligned}$$

因为 π 中使 i_1, i_2, \dots, i_k 变动的 $k < r$, 所以由归纳假设, π_1 可写成不相交的循环置换的乘积 $\pi_1 = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_p$, 在这些 η 里, i_1, \dots, i_k 不会变动,不然的话,

$$\eta = (\dots i_p, i_k \dots) \quad p \leq k$$

那么, i_1 不会在其余的 η 中变动,也不从 $i_1 \rightarrow i_2$, 但我们知道, π 使 i_1 变动,这是一个矛盾.这样, π 是不相交循环置换的乘积.

$$\pi = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_p \eta_{p+1} \dots \eta_q.$$

例如, S_4 的全体元素可以表示成:

(1)

(1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4)

$(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)$
 $(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2),$
 $(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 3), (1\ 4)(2\ 3),$

用循环置换来表示置换的方法比第一种方法简单,它还能一诉我们每一个置换的特性.比方说,在例 1.2.3 中我们只用了 4 个置换去表示 6 个元,这 6 个元分成 3 类,这类的元性质是相同的,所以用循环置换的第一种方法的时候比较多.当然在特殊情形之下,也有用第一种方法比较方便的时候.

定义 1.2.4 一个[在某种关系下集合 S]上的保持该关系不变的变换,称为对称变换.

[在某种关系的集合的对称性]好像外集合 S 上有比较多的对称变换.

两个对称变换的合成是对该集合上的恒等置换(即对称变换恒等变换).一个集合上的对称变换的集合 S 关于对称变换的合成来说,有一性质:

- i. 对称变换的合成还是对称变换;
- ii. 对称变换的合成满足结合律;
- iii. 恒等变换 e 是 S 中对称变换的合成等于该对称变换;
- iv. 每一个对称变换都有逆变换.

于是 S 关于对称变换的合成 \circ 构成一个代数,这个代数 S 可以及所有有这样的集合 S 的代数 S 是代数 S 的代数,中要包含“ \circ ”的代数.最基本的概念是“ \circ ”是代数 S 的象,所以 S 是代数 S 的代数,对称变换的抽象概念.

问题 1.2

- 找出所有 S_3 的不能和 $(1\ 2\ 3)$ 交换的元.
- 把 S_3 的元用 $(1\ 2\ 3)$ 式不用 $(1\ 2\ 3)$ 式表示.
- 证明:两个不相连循环置换可以交换.
- i. 证明: $(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)^{-1} = (i_k\ i_{k-1}\ \dots\ i_1)$.
- 证明: $(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ 的阶数是 k .
- 证明: S_n 中每一个元都可以表示为 $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$ 的乘积.

§ 1.3 平面运动

定义 1.3.1 平面上的保距变换是保持平面上任何两点的距离都不变的变换(是一种对称变换).

平面上的保距变换的集合 $M(\mathbb{R}^2)$ 对于保距变换的合成构成群, $M(\mathbb{R}^2)$ 称为平

面的保距变换群。

在这里我们首先回忆一下平面及其运动的概念。

从欧几里德几何的说法, 把平面想象为空间各方无限延伸的平板面, 我们才有平面上线、点等几何的概念。用解析几何的说法, 平面就是集合 \mathbf{R}^2 (用线性代数的语言, \mathbf{R}^2 也就是二次型中秩为 2 的二次型) 关于平面 P 的这两种刻画——几何直观的刻画和代数语言的刻画——等同起来。

定义 1.3.2 几何的定义 平面 P 的一个保距变换, 亦即若 f 是平面 P 上的一个变换, 则对 P 上任意 x, y , $|x - y|$ 和 $|f(x) - f(y)|$ 的距离等于 $|x - y|$ 和 $|f(x) - f(y)|$ 的距离, 则称 f 为平面 P 的一个保距变换。平面 P 就是 f 的“对岸”。

定理 1.3.1 (代数形式) 平面 \mathbf{R}^2 上的一个保距变换 f 只是 \mathbf{R}^2 中具有下列形式的变换:

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x', y')$$

其中 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是一个正交阵, $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ 是一个取定值的向量。

定理 1.3.1 几何形式 平面的运动只有下列两种:

- a) 沿任一给定向量的平移;
- b) 以任意点为中心的旋转;
- c) 绕 θ 角作反射后再沿该直线上的一给定向量作一平移。

我们还知道, 在定理 1.3.1 中, 当 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 时, 运动 f 就是绕 θ 角旋转, 当 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 时, 运动 f 是以过原点的直线为轴的反射, 当 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I$ 单位矩阵时, f 就是沿向量 $A = (a, b)'$ 的平移。

这里重要的是, 两个变换是可以相乘的, 也就是 M 是一个集合, f 和 g 是 M 的两个变换, 规定 M 到 M 的映射 $f \cdot g: M \rightarrow M$, $(f \cdot g)(v) = f(g(v))$, 则易知 $f \cdot g$ 是 M 的变换。我们定义 $f \cdot g$ 是变换 f 和变换 g 的乘积, 记作 $f \cdot g$ 。于是 M 上的两个变换 f, g 的乘积仍是一个一一变换。

我们把 M 的一一变换全体记作 $T(M)$, 并把映射

$$T(M) \times T(M) \rightarrow T(M)$$

$$(f, g) \mapsto f \cdot g, \text{ 称为 } T(M) \text{ 的一个乘法。}$$

定义 1.3.3 M 是一个非空集合, $T(M)$ 是 M 的所有一一变换的全体。我们把 $T(M)$ 及变换的乘法放在一起考察, 记作 $(T(M), \cdot)$ 。这里 \cdot 表示变换的乘法, 并称之为 M 的变换群。

定理 1.3.2 变换群 $(T(M), \cdot)$ 具有下列性质:

- i. 封闭性, $\forall f, g \in T(M)$, 有 $f \circ g \in T(M)$;
- ii. 结合律, $\forall f, g, h \in T(M)$, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
- iii. 单位元, 存在 $I \in T(M)$, 使得对于 $\forall f \in T(M)$, 有 $I \circ f = f \circ I = f$;
- iv. 逆元, 对于 $\forall f \in T(M)$, 存在 $f^{-1} \in T(M)$, 使得 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

现在我们从一般集 M 及任一变换 f 入手而 R 为运动上来. 用 M/R 表示平面 R 上的所有运动, 当然 I 也是特殊运动. f 为变换, 即有 $M/R \rightarrow M/R$, 后者是 R^2 的所有一一变换的全体.

很容易证明, 平面的所有运动 (所有变换) 乘积仍是一个运动. 一个运动的逆变换仍是一个运动, 当然恒等变换是一个保距变换.

这样我们就得到

定理 1.3.3 $M(R^2)$ 对于变换的乘法具有下列性质:

- i. 封闭性, $\forall f, g \in T(R^2)$, 有 $f \circ g \in T(R^2)$;
- ii. 结合律, $\forall f, g, h \in T(R^2)$, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
- iii. 单位元, 存在 $I \in T(R^2)$, 使得对于 $\forall f \in T(R^2)$, 有 $I \circ f = f \circ I = f$;
- iv. 逆元, 对于 $\forall f \in T(R^2)$, 存在 $f^{-1} \in T(R^2)$, 使得 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

很自然地, 我们该有下面的

定义 1.3.4 称 M/R 为 $T(R^2)$ 的商群, 这里 \circ 表示运动的乘法 (也就是变换的合成, 后面的乘法符号省略).

现在考察这个商群 M/R 的构成, 即平面运动的全体, 记之记作 $S(K)$.

平面图形 K 是映射于在 R^2 上的一集合 $\{A \in R^2 : A \text{ 上任一点 } P \text{ 间有距离, 有使人保持不变的点, 也就是使 } f(A) = A, f(P) = P, \forall P \in A\}$.

定义 1.3.5 我们把 $S(K)$ 称作平面图形 K 的对称.

这样, 我们就把图形 K 的自同构的映射映射到数集 $S(K)$ 上. 集合 $S(K)$ 来刻画 K 的自同构就是集合 $\{A \in R^2 : A \text{ 上任一点 } P \text{ 间有距离, 有使人保持不变的点, 也就是使 } f(A) = A, f(P) = P, \forall P \in A\}$. 我们自然问, $S(K)$ 就是你所研究的对称, $S(K)$ 是我们心目中研究对称的, 一个数学模型. 然而从实践上来看, n 个数学模型是可以接受的, 是好的. 我们容易证明下面

定理 1.3.4 $\{S(K) : K \text{ 为平面图形}\}$ 满足下列四个条件:

定义 1.3.6 我们称 $\{S(K) : K \text{ 为平面图形}\}$ 为对称变换群.

例 1.3.1 设正方形 $ABCD$ 的方形图, 在正方形上, 运动的全体构成了正方形对称群的称度. 但若正方形 $ABCD$ 已重合, 则正方形 $ABCD$ 重合, 当然要有自身重合. 因此, 恒等运动使正方形中心不动, 且有或绕中心 O 旋转, 或者关于两过中心 O 的直线的映射. 时刻 1. 容易看到, 正方形 $ABCD$ 是入于集合 $S(K)$ 中. n 个数的旋转对称的, 对于关于对角线 AC, BD 和直线 KL, MN 的映射, 它也是对称的. 这八个运动也就刻画着正方形的

对称.

长方形的对称的集合由绕中心作180°旋转和关于对边中点连线的映射组成,而平行四边形对称的集合则绕中心作180°倍数的旋转组成,即关于中心的映射和恒等变换组成(图1.6).

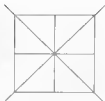


图 1.6

长方形的对称变换由,绕中心作180°旋转和关于对边中点连线、两条对边中点连线所作的反射,一共8个运动.

很容易验证这8个运动,使长方形回到自身,才180°一方面利用Chasles定理可得其他的面,另一方面使正方形回到自身.



图 1.7

对于图形的对称性可用对称变换即这一代数对象来刻画,下面我们可用代数方法来研究图形的对称,以有心圆锥曲线为例,我们利用方程与几何联系起来,可用代数方法研究,它和几何一样,不同的是在解几何问题时用的是多项式,而这一次是用“群”了.

问题 1.3

1. 设 f 是平面 \mathbb{R}^2 的一个运动,其代数形式为:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x', y')$$

满足 $f(x, y) = (x', y')$, 且 $f(f(x, y)) = (x, y)$, 交换性, 如果 $ax^2 + by^2 = 1$, 那么存在一条直线 L , 使得运动 f 是关于直线 L 的对称变换, 即对任意的 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, 有 $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ 是点 (x, y) 关于直线 L 的对称点, 从而 f 是轴反射.

2. 设 M 是一个非空集合, 证明: 变换群 $S(M)$ 满足结合律.

3. 设 K 是正六边形, 写出 K 的对称变换群 $S(K)$.

§ 1.4 对称变换群

群论的数学最早源于对代数方程求解的研究, 16世纪方程的代数解法已在公元前几百年就为巴比伦人所知道, 一般二次和三次方程的求根公式也在16世纪. 意大利数学家费罗(F. Ferro, 1522—1586)、塔塔利(T. Tartaglia, 1535—1584)、卡尔丹(C. Cardano, 1539—1576)和费拉里(F. Ferrari, 1533—1565)在16世纪前半叶, 数学家们希望能找到五次或更高次方程的求根公式, 但都徒劳无功. 直到1824年, 拉格朗日才第一个宣布“不可能用根式解四次以上方程”, 但他却不能证明这个论断. 1847年, 鲁菲尼



图 1.7



图 1.8

由图 1.8 不难看出,正方形的对称变换只有两种:

1) 绕正方形中心点按逆时针方向, 旋转 90° 、 180° 、 270° 的旋转;

2) 关于直线 L_1, L_2, L_3, L_4 的镜面反射.

为了讨论起来方便, 正方形的对称变换, 我们用数字 $1, 2, 3, 4$ 来代表正方形的四个角 (在图 1.9 中), 显然, 正方形的每一个对称变换都导致了这四个角的置换. 如果对称变换将角 i 变到角 j , 那么我们就用 k_{ij} 来

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{pmatrix}$$

来表示这个对称变换.

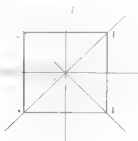


图 1.9

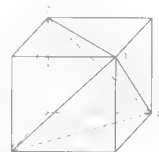


图 1.10

易知, 正方形的每一个对称变换, 都唯一地确定一个置换. 不同的对称变换对应不同的置换. 对正方形的每一个对称变换, 都可用唯一的一个置换来表示. 表 1.1 列出了正方形的对称变换及其唯一置换表示.

表 1.1 正方形的对称变换及其相应的置换表示

| 对称变换 | 置换表示 |
|---------------------------|----------------|
| f 表示绕中心旋转 90° | $(1\ 2\ 3\ 4)$ |
| f^2 表示绕中心旋转 180° | $(1\ 3)(2\ 4)$ |
| f^3 表示绕中心旋转 270° | $(1\ 4\ 3\ 2)$ |
| f^4 表示绕中心旋转 360° | (1) |
| g 表示关于直线 L_1 的反射 | $(1\ 2)(3\ 4)$ |
| g_2 表示关于直线 L_2 的反射 | $(1\ 4)(2\ 3)$ |
| g_3 表示关于直线 L_3 的反射 | $(2\ 4)$ |
| g_4 表示关于直线 L_4 的反射 | $(1\ 3)$ |

由上表可知,关于对称变换的乘积对应于相应的置换的乘积,所以正方形的对称变换群是 S_4 的一个子群,记作 D_4 .

般地, n 边形 ($n \geq 3$) 的对称变换组成 S_n 的一个子群,记作 D_n ,称为 n 面体群.易知, n 边形有 n 个旋转(包括恒等变换)和 n 个反射,所以 n 面体群的阶数是 $2n$.

例 1.4.4 求正四面体的对称变换群.

解:四面体可以看成是一个正四面体(图 1.1.1).四面体的四个顶点标以 1, 2, 3, 4 四个数字,则四面体的每一个对称变换都与 S_4 中一个置换来表示.因此,四面体的对称变换群是 S_4 的一个子群,共有 12 个对称变换,且每一个置换都表示四面体的对称变换,如镜面对射.

容易看出,绕任一经过四面体的一对顶点的直线且以该边为轴作 120° 的旋转是四面体的对称变换,这样的变换有 8 个.另一方面,绕任一条过四面体的对边中点的轴旋转 180° 的变换也是四面体的对称变换,这样的变换有 3 个.再加上恒等变换,共有 12 个对称变换.所以四面体一共有 12 个对称变换,且这些变换都是旋转.又因为镜面的反射不是四面体的对称变换,所以镜面的反射与任一绕轴旋转的乘积也都不是四面体的对称变换.由此可知,上述 12 个旋转恰是四面体的全部对称变换.这 12 个对称变换用轮换形式可记为

(1),

(1 2 3), (1 3 2), (1 2 4), (1 4 2), (1 3 4), (1 4 3), (2 3 4), (2 4 3),

(1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3).

因此,四面体的对称变换群就是 3 次交代群 A_4 . 我们知道,总共有五种植多面

体,除了四面体,还有立方体、正八面体、正十二面体和正二十面体,于是求得这几个正多面体的对称变换群的阶数分别是12, 24, 24, 60,它们分别是二次对称群和三次交错群.

例 1.4.5 设 f_1, \dots, f_n 是数域 F 上的 n 元多项式,则多项式 f_1, \dots, f_n 的对称变换群等于 S_n 的充分必要条件是 f_1, \dots, f_n 是互对称多项式.

例 1.4.6 试求多项式 $x_1+x_2-x_3-x_4$ 的对称变换群.

解 我们用置换

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{matrix}$$

表示将 x_1 变到 x_2 的变换,易知,多项式 $x_1+x_2-x_3-x_4$ 的任何置换最多只能将 x_1 与 x_2 或 x_3 与 x_4 互换,所以多项式 $x_1+x_2-x_3-x_4$ 的对称变换群 G 是 $(1\ 2), (3\ 4)$ 生成的群,即 $G = \{(1\ 2), (3\ 4)\}$.

从而, $x_1+x_2-x_3-x_4$ 的对称变换群为 $\{(1), (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\}$.

Euler 小传

欧拉 (Euler, 瑞士数学家、物理学家、天文学家,1707—1783) 出生于瑞士巴塞尔,1730 年迁居圣彼得堡,1735 年又迁回瑞士,对数学有浓厚的兴趣,并得到约翰·伯努利的指导,1736 年发表论文,1740 年搬到俄国圣彼得堡科学院工作,1742 年搬到力学彼得堡科学院担任教授,1743 年又被聘为圣彼得堡和数学教授大量的著作使他留名后世,主要成就如下:

(1) 在几何学上,普鲁士数学家欧拉首先把几何材料,说成物理数学,几何学课本,长达一百多页,每年都要改行,1766 年,欧拉使他左右眼已完全失明,然而他的凭着惊人的记忆力和计算技巧,继续研究几何学.欧拉最早论著《他的全集》有 1 卷之多,他的《几何学》和《论力学》,为力学、物理、力学、几何学已成为数学上的经典著作.

(2) 欧拉研究几何涉及数学的许多分支,数学上有许多定理和公式都是以欧拉的名字命名的,欧氏几何体,欧拉角,数,三角函数,复变函数中的欧拉公式以及微分方程中的欧拉方程等,1736 年,欧拉首先给出了微分方程的例子.

(3) 欧拉最先讨论数,欧拉是扩展一般和数,讨论区域,为分析学的一些重要分支与微分几何的分支和必要条件是,基性几何,有以数,数,集合数等许多数,领域中有所创建,欧拉发现了素数多项式,分解定理,为费马大定理的证明,并引入了数论中重要的欧拉函数,欧氏著名的欧氏几何七书引起等.现在有许多数学符号也起源于欧拉,如用 Σ 来表示求和,用 π 表示圆周率,用 i 表示虚数单位,用 e 表示自然

对数的底(1736年)等.

大科学家、物理学家阿拉戈 (D. F. Arago) 称赞欧拉道:“Euler 计算起来轻松自如,就像人们呼吸,鹰在空中飞翔.”

Euler 于 1783 年 9 月 18 日卒于俄国圣彼得堡.

问题 1.4

1. 写出正五边形、正六边形的对称变换群 D_5 、 D_6 .

2. 在 D_5 中, 用几何方法说明, 为何两个反射的复合是一个旋转.

3. 在 D_5 中, 用几何方法说明, 为何一个反射与一个旋转的复合是一个反射.

4. 确定 D_5 中的元素个数, 问 D_5 中有多少个反射.

5. D_5 中五边形的对称变换群与多项式 $x^5 - 1$ 的对称变换群同构.

第2章 群的结构

群论的发生比较晚,早在十八世纪和十九世纪初期它仅是为了解决力学方面的某些问题而发展起来的,到了十九世纪五十年代在解决量子力学问题,第一次发展了无穷维空间的对称性和量子力学完全群论的对称性,但直到二十世纪四十年代量子力学的发展,群论在量子力学中才具有了特殊的意义,对对称性的规律的重要意义,因此群论的方法和结果得到了广泛的应用。

正是这种双向、多层次、多方位的交流,变换自在行为所起着一个关键的作用,只有从自在力场中找出一个理论为基础,这两个领域对辩证系统的研究提供了原动力。

[illegible]

§ 2.1 群

定义 2.1.1 设集合 S 和 \cdot 满足结合律, 0 是 S 中的零元, 则 (S, \cdot) 形成的代数系统 $(S, \cdot, 0)$ 称为半群. 这个半群记成 (S, \cdot) 或者简记成 S .

运算 $x \cdot y$ 也常常简写成 xy , 像通常那样令

$$x^i = x \circ x, x^2 = x \circ x \circ \cdots \circ x (n \uparrow x).$$

如果运算又满足交换律, 则 (S, \cdot) 叫做可换半群.

定义 2.1.2 设 S 是 G 的子群, 元素 $e \in S$ 且 $e \neq 1$, 是指对任意 $a \in S$, $ae = ea = a$. 如果 S 有单位元 e , 则它是唯一的, 记作 1 .

定义 2.1.3 设 $\langle S, \cdot \rangle$ 是一个半群, 元素 a 的逆元素, 是指 $x \in S$ 使得 $ax = a$. 如果 a 有逆元素, 则它是唯一的.

我们把这个唯一的逆元素记作 a^{-1} , 则 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

例 2.1.1 $(\mathbf{N}, +)$, $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Q}, +)$ 都是半群.

例 2.1.2 以 $M_n(C)$ 表示 n 阶复方阵全体, 它对乘法形成含单位元子群, 单位元是单位方阵 I , 并且当 $n > 1$ 时, 易知子群 $M_n(C)$ 不是交换的.

例 2.1.3 设 n 为正整数, 我们在 \mathbb{Z} 上定义如下关系: 对 \mathbb{Z} 中整数 a 和 $b, a \sim b$ (即 $a \equiv b \pmod{n}$)

易知这是等价关系, 于是 \mathbb{Z} 拆分成 n 个等价类, $0, \dots, n-1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 表示上述等价类组成的集合, 在 \mathbb{Z} 上定义乘法 $a \cdot b = ab$, 则 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 对此乘法是含单位元交换半群, 单位元是 $[1]$.

在 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上定义加法 $a + b = a + b$, 则 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是含单位元交换子群, 单位元是

例 2.1.4 我们已经知道, 若有映射 $\varphi: S \rightarrow T, \varphi: T \rightarrow U, \psi: U \rightarrow V$, 则 $\psi(\varphi(x)) = \psi(\varphi(y))$. 由此, 设有子集 S , 令 $f: S \rightarrow T, f(x) = x$ 是 $S \rightarrow S$ 的映射, 以 “ \cdot ” 表示映射的积, 则 $(T(S), \cdot)$ 是一个有单位元半群.

定义 2.1.4 设 S 是一个半群, 集 S 上的等价关系 \sim 叫做子群 S 上的同余关系, 简称同余, 是指若 apc, bpd , 则 $abpcd$.

以后, 如果 ρ 是半群 S 上的同余, 对 $a \in S$, 称 $\{x \in S \mid x \sim a\}$ 的等价类为 a 关于 ρ 的同余类, 常以 $a\rho$ 记之, 由此得下述命题.

定理 2.1.1 设 ρ 是半群 S 上的同余, 在商集 S/ρ 中定义, $(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho, a, b \in S/\rho$ 是一个半群.

证明 由上述, $(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$ 是 S/ρ 中的, 故, 有 S/ρ 上运算的结合律立即得到 S/ρ 上运算的结合律. 易称上述子群 S/ρ 为 S 关于 ρ 的商半群.

例 2.1.5 在半群 $(\mathbb{Z}, +)$ 中, 考虑等价关系 “和 $a \in \mathbb{Z}$ 同一余类”, $\mathbb{Z}/\rho = \{a \pmod{n}, b \pmod{n}, \dots, (a+n)\pmod{n}, \dots, (a+kn)\pmod{n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, 故 $\mathbb{Z}/\rho = \{a \pmod{n} \mid a \in \mathbb{Z}\}$, 从 $(\mathbb{Z}, +)$ 到 $(\mathbb{Z}/\rho, +)$ 的映射 $f: a \mapsto a \pmod{n}$ 是 \mathbb{Z}/ρ 上的同余, 相应的商半群 \mathbb{Z}/ρ 同构于 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 中子群.

定理 2.1.2 设 ρ 是半群 S 上的同余, 则自然映射 $f: S \rightarrow S/\rho, f(x) = x\rho$ 是满同态.

证明 f 是满射, 又 $(ax)\rho = (xh)\rho = a\rho h\rho = f(a)f(h)$, 从而 f 是满同态.

定理 2.1.3 设 S 是一个半群, 令 $X \subseteq S$, 若存在单位元 $e \in X, e \neq I(X)$, 则 $S \setminus X \leq T(X)$.

证明 设映射 $f: S \rightarrow T(X)$ 为对 $a \in S, a \neq e$, 且 $e \neq x \in S \rightarrow S \setminus X$ 与 $x \in S, x \neq e$, 则 f 是单射. 事实上, 对 $x, y \in S$, 若 $x \neq e, y \neq e$, 故对 $\forall x \in S, x \neq e$

特别地, 令 $x = 1$, 得 $a = bp$ 是一个单同态, 这是因为

$$x(\rho_a \rho_b) = (x\rho_a)\rho_b = (xa)\rho_b = (xa)b = x(ab) = x\rho_{ab}, x \in S, \text{ 从而 } \rho_a \rho_b = \rho_{ab}.$$

设 S 是半群, R 是集 S 上的一个等价关系, 于是商集 $S/R = \{a \pmod{R} \mid a \in S\}$, 这里 a 表示 a 关于等价关系 R 的等价类, 在商集中能占借 S 中的运算, 规定 $a \cdot b$

ab 得到 Δ 上的运算, 一般来说是不行的, 这是因为一般情况下, ab 依赖于 a, b 代表元素 α 及 β 代表元素 β 的选择, 即 b, c, d 不能保证 $ab = cd$, 这就导致上述关于同余的概念.

定义 2.1.5 非空集合 G , “ \cdot ”是它的运算, 如果满足:

- $\forall a, b \in G$, 有 $ab \in G$;
- 结合律成立, 即 $\forall a, b, c \in G$, 有 $(ab)c = a(bc)$;
- 存在单位元 $e \in G$, 即存在一个 $e \in G$, 对于 $\forall a \in G$, 有 $ae = ea = a$;
- $\forall a \in G$, a 都有逆元 a^{-1} , 即 $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

称 G 对于其上的运算来说构成了一个群, 记为 (G, \cdot) .

定义 2.1.6 如果群 G 含有元素个数是有限数 n , 称为有限群; 且元素个数称为群的阶, 记为 $|G| = n$.

例 2.1.6 $\{1, -1, \dots, i, -i, \dots, i^{n-1}, -i^{n-1}, \dots, 1\}$ 对于普通乘法构成循环群, 其中 1 是单位元, -1 是 i 的逆元, i 与 $-i$ 互为逆元.

例 2.1.7 $\Delta = \{1, (1, 2), (1, 3), \dots, (1, n), (1, 2, 3), \dots, (1, 2, 3, \dots, n)\}$ 对于置换的合成构成有限非交换群, 称为三次对称群.

例 2.1.8 实数集合 \mathbb{R} 上所有非零实数方阵的集合 (I_n, \mathbb{R}) , 对于矩阵的乘法构成群, 称为一般线性群.

例 2.1.9 考虑群 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $a+b \in \mathbb{Z}_n$, 这里 n 是一个正数. 设 R 为边长为正方形中心 O 的顺时针方向旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 的变换, 则 $R^n = RRRR \dots R$ 是恒等变换. 令 H 为正方形 $ABCD$ 对 AC 轴的反射, Δ 为正方形 $ABCD$ 对 BD 轴的反射, 令 D 为正方形 $ABCD$ 对 AD 轴的反射, D' 为对 BC 轴的反射, 与 $D = R^2, R^4, R^6, R^8 = I, H, \dots, I, \dots$ 关于变换的积是一个群, $R^n = I$ 是它的单位元, $D = D'$ 是它的逆元.

例 2.1.10 在 \mathbb{Q} 上规定: $\forall a, b \in \mathbb{Q}$, 有 $a \cdot b = a + b + ab$, “ \cdot ”是合成群解. 显然 \cdot 是成立的:

$$\begin{aligned} \text{ii. } (a \cdot b) \cdot c &= (a+b+ab) \cdot c = (a+b+ab)+c+(a+b+ab)c \\ &= a+b+c+ab+ac+bc+abc, \\ a \cdot (b \cdot c) &= a \cdot (b+c+bc) = a+(b+c+bc)+a(b+c+bc) \\ &= a+b+c+ab+ac+bc+abc. \end{aligned}$$

所以 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

i. 如果 e 是单位元, 则对于任意 $a \in \mathbb{Q}$, 应有 $a \cdot e = a$, 这时 $a+e+ae=a$, 得 $e=0$, 所以数 0 是单位元;

iv. 对于 $\forall a \in \mathbb{Q}$, 如果 b 是 a 的逆元, 应有 $ab = ba = e$, 这时 $ab = a+b+ab = e$, 得 $b = -a-1$.

$-\frac{-a}{1+a}$, a 的逆元是 $\frac{-a}{1+a}$, 而 -1 没有逆元.

例 1.10 述, Q, \cdot 不构成群不是, 对 1 来说 $1 \cdot 1 = 1$ (非恒等的乘法“ \cdot ”不构成群).

定义 2.1.7 设 (G, \cdot) 是一个群, H 是 G 的子集, 关于二元运算“ \cdot ”封闭, $(1, \cdot)$ 也是一个群, 则称 (H, \cdot) 为群 (G, \cdot) 的子群, 并记为 $H \leq G$.

例 2.1.11 设 (G, \cdot) 是一个群, $C = \{x \in G \mid x \cdot a = a \cdot x, \forall a \in G\}$, 则 C 是 G 的中心, C 的单位元正是 G 的单位元.

以 $\langle \mathbb{Z}_6, + \rangle$ 为例, 子群 H 为单元素 $\{0\}$ 或 $\{0, 3\}$ 或 $\{0, 2, 4\}$. 这一结论是显而易见的. 设 $H = \{0, 3\}$ 是 H 的生成元, 0 是 H 的单位元, 在 H 中有 $0+0=0, 0+3=3, 3+0=3, 3+3=0$, 从而在 H 中我们得到 $0+0=0, 0+3=3, 3+0=3, 3+3=0$, 从而在 H 中我们得到 $0+0=0, 0+3=3, 3+0=3, 3+3=0$, 从而在 H 中我们得到 $0+0=0, 0+3=3, 3+0=3, 3+3=0$.

由于 $0+0=0, 0+3=3, 3+0=3, 3+3=0$, 从而在 H 中我们得到 $0+0=0, 0+3=3, 3+0=3, 3+3=0$, 从而在 H 中我们得到 $0+0=0, 0+3=3, 3+0=3, 3+3=0$. 由此, 我们得到下述定理:

定理 2.1.4 设 (G, \cdot) 是一个群, $a \in G$ 的幂元, 则 G 的子集 H 是子群的充分条件是:

(1) $e \in H$; (2) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$; (3) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

从这一定理 (即得), 若 H, H' 是 G 的子群, 则 $H \cap H'$ 也是 G 的子群. 取地, 若 $H' = 1$ 是 G 的子群, 则其交 $H \cap H' = 1$ 是 G 的子群.

为了研究各群间的关系, 我们定义 G, G' 之间的映射, 但群不仅是一个集合, 还有运算, 所以要求映射与群运算保持协变, 即满足:

定义 2.1.8 设有群 (G, \cdot, e, \dots) , (G', \cdot', e', \dots) , 映射 $\mu: G \rightarrow G'$ 是同态, 是指对 $\forall a, b \in G$, 有 $(a \cdot b)\mu = (a\mu) \cdot' (b\mu)$.

由此我们可以看出, 群同态, 是指作为子群的同态 $\mu: G \rightarrow G'$ (同态也可以叙述如下:

$\mu \times \mu: G \times G \rightarrow G' \times G'$, 为 $(a, b)(\mu \times \mu) = (a\mu, b\mu)$).

对于同态 μ , 如果映射 μ 是单射, 则称 μ 为单射同态, 如果映射 μ 是满射, 则称同态 μ 为满射同态, 如果映射 μ 是双射, 则称同态 μ 为同构. 如果存在从群 G 到群 G' 的同构, 则称群 G 与 G' 同构, 记作 $G \cong G'$.

从同态的定义立即得到同态的下述基本性质:

(1) 若 $\mu: G \rightarrow G'$ 是群同态, 则 $\mu(e) = e'$, 这里 e, e' 分别是 G, G' 的恒等元.

事实 $(a \cdot e)\mu = (a\mu) \cdot' (e\mu)$, 又 $(a \cdot e)\mu = a\mu$, $\forall a \in G$ 由此得 $e\mu = e'$.

(2) 若 $\mu: G \rightarrow G'$ 是群的同态, $a \in G$, 则 $(a^{-1})\mu = (a\mu)^{-1}$.

事实 $(a \cdot a^{-1})\mu = (a\mu) \cdot' (a^{-1}\mu)$, 又 $(a \cdot a^{-1})\mu = e\mu = e'$, 因此得 $a^{-1}\mu = (a\mu)^{-1}$.

(3) 若 $\mu: G \rightarrow G'$ 是群的同态, $a \in G, k \in \mathbb{Z}$, 则 $(a^k)\mu = (a\mu)^k$.

事实上, 当 $k=1$ 时, $x=1$, 故 $x^k = x^1 = x$. 当 $k>1$ 时, $x \neq 1$, 从而 $k-1$ 对等式成立:

于是 $k=1$ 时, 利用归纳法证明. 对于 $k>1$ 的情形, 利用归纳假设及 $k-1$ 的结论得到:

从而, 若 $x, y \in H$ 是群的同态, 则 $\langle x, y \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle \subseteq H$ 是 G 的子群, 叫做 G 关于 H 的同态像.

事实上, 首先 $x, y \in \langle x, y \rangle$, 若 $x, y \in \langle x \rangle$, 则存在 $n, m \in \mathbb{Z}$ 使 $x = x^n, y = y^m$. 从而 $\langle x, y \rangle = \langle x^n, y^m \rangle = \langle x^n y^m \rangle \subseteq \langle x \rangle \langle y \rangle \subseteq H$. 又 $\langle x, y \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle$, 从而 $\langle x, y \rangle$ 是 G 的子群.

其次, 若 $x, y \in H$ 是同态, H 是 G 的子群, 将 x, y 也在 H 上, 便得到同态 $x \mapsto H \cdot x, y \mapsto H \cdot y$. 从而 H 是 G 的子群, 从而子群 $H \cdot H = H$. 从而, 令 $H \cdot x = H$ 是 G 的子群.

例 2.1.12 设有数域 F 上 n 阶方阵 A, B, C, D, \dots , F 中 n 阶方阵 A, B, C, D, \dots 关于矩阵乘法形成的群同构.

从同构的定义, 可以得到, 若 $\phi: G \rightarrow G'$ 是同构映射, 则 $\phi: G \rightarrow G'$ 也是同构映射, 从而 $\phi(G) = G'$. 又对任一直 $G, H \subseteq G$, $\phi(H)$ 也是 G' 的子群和子映射, 显然是一个同构映射, 从而对任何群 G , 有 $G \cong G$.

又若 $\phi: G \rightarrow G', \psi: G' \rightarrow G''$ 都是同构映射, 则 $\psi \circ \phi: G \rightarrow G''$ 也是同构映射, 从而 $G \cong G''$. 由此, $G \cong G', G' \cong G'' \Rightarrow G \cong G''$.

定理 2.1.5 (Cayley 定理) 任一有限群 G 同构于 S_n 的一个子群.

证明 定义映射 $\phi: G \rightarrow S_n, \phi(g) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1 g, x_2 g, \dots, x_n g)$, 其中 x_1, x_2, \dots, x_n 是 G 中 n 个互不相同的元素. 从而 ϕ 是集合 G 上的置换.

定义 2.1.9 设 $a \in G$ 是 G 中元素, 若存在正整数 n , 使得 $a^n = 1$, 使等式成立的 n 的最小正整数称为元素 a 的周期.

例 2.1.13 $\langle a \rangle = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ 是 G 的子群, 其中 $a^n = 1$. 从而 a 的周期为 n . 从而 a 的周期为 n . 从而 a 的周期为 n .

例 2.1.14 $\langle a \rangle$ 是 G 的子群, 从而 a 的周期为 n . 从而 a 的周期为 n . 从而 a 的周期为 n .

定义 2.1.10 设 G_1, G_2, \dots, G_n 是任意 n 个群, 则称

$G = \langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle$ 为 G_1, G_2, \dots, G_n 的直积. 从而 G 是 G_1, G_2, \dots, G_n 的直积. 从而 G 是 G_1, G_2, \dots, G_n 的直积.

例 2.1.15 $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \dots, \langle c \rangle$ 分别为 n_1, n_2, \dots, n_r 阶循环群, 从而 $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \dots, \langle c \rangle$ 为 n_1, n_2, \dots, n_r 阶循环群.

证明 $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \dots, \langle c \rangle$ 分别为 n_1, n_2, \dots, n_r 阶循环群, 从而 $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \dots, \langle c \rangle$ 为 n_1, n_2, \dots, n_r 阶循环群.

取 $\alpha, \beta \in G$, 则 $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha^2 = \beta^2 = (ab)^2 = (ba)^2$, α 与 β 互素, 所以 α, β 的周期为 1, 则 $G = G_1 \times G_2$ 为 15 阶循环群.

显然, 对称变换所满足的性质与群中元素的运算上非常类似, 如果我们抛开元素和运算的具体内容和形式, 而只考虑两者之间的本质关系, 就能得到下面结论.

群是对称概念的数学描述, 研究群就是为了研究复杂的对称.

Cayley 小传

凯莱 (A. Cayley, 1829 年 8 月) 出生于英格兰, 父亲在俄国经商, 凯莱的童年在那里度过, 18 岁时随父母返回英国, 进入剑桥大学攻读, 数学才华初露, 担任大数运算第一名考入剑桥大学三一学院, 不久后就发表了他的第一篇论文, 第二年又发表了 8 篇论文, 三一学院毕业后留校任教 3 年.

1853 年凯莱接替了已故的剑桥三一学院院长, 又发表了近 20 篇数学论文, 其中大部分既已成为数学经典的内容, 又成为剑桥大学一景. 凯莱回到剑桥任数学教授, 直至去世. 他最大的非数学方面的贡献是于 1869 年发表了《桥式》, 为剑桥大学建造了他的女友西尔威斯玛 (Mary Storer) 的纪念碑. 1870 年, 凯莱发表《不变量理论》, 对群理论的研究中起了重要的作用. 他为人, 抽象性、代数数以及矩阵等概念, 为对几何、代数代数数赋予了新的贡献, 其中包括: 发明了表示几何式的矩阵符号, 建立了行列式的乘法定理等.

Cayley 一生共发表过 1 个专著《椭圆函数初论》(1876), 但发表了近 100 篇论文, 他的论文选集有一卷之多, 每卷有 400 多页.

Cayley 于 1895 年 1 月卒于剑桥.

问题 2.1

1. 确定 S_3 的乘法表.

2. 令 G 是 $\{x \mapsto ax + b \mid a, b \in R\}$, 其中 a 和 b 都是实数, 让 $a \neq 0$. 定义自线性的变换为集, 验证 G 是 R 的一个变换群.

3. G 是一个群 M 的一个子集, 对 G 是 M 的子群当且仅当每个 $x \in G$ 在 M 中都是可逆的, 并且对 $\forall g_1, g_2 \in G, g_1^{-1}g_2 \in G$.

4. 证明: 假如 $n \geq 3$, 那么 S_n 的中心的阶是 1.

5. 设 G 为有限群, $C = \{mn, n, n^2, \dots, n^{m-1}\}$, 证明: C 中存在唯一的元素 x , 和 λ , 使得 $g \cdot xy = yx$ 且满足 $x^m = \lambda^{-1}$.

6. 设 G 为 n 阶群, $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$, 证明: 存在整数 $j, j, 1 \leq j \leq n$, 使得 $x_1 x_2 \cdots x_j = 1$.

7 设 G 是群, $K = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} \subseteq G, 1 \leq n \in \mathbb{N}$, 证明: 在 n 个乘积 $g_1 g_2 \cdots g_n$ 中, 至多有 $n(n-1)/2$ 个元素 $g_i, g_j \in K$.

8 设 a, b 是群 G 中两个可交换的元素, 证明: $|a| \mid |b|$
 $|ab| = \frac{|a||b|}{|a| \wedge |b|}$

§ 2.2 置换群

1. 循环群

设 G 是一个群, S 是 G 集的一个子集. 那我们要考虑 G 的包含 S 的最小子群, 即这样一个子群, 它包含 S 而又包含在 S 生成的包含 S 的子群中. 如果这样的子群存在, 那么它是唯一的. 这是因为, 若 H, H' 是含 S 的最小子群, 则知 $HH' = H, H' = H$, 故有 $H = H'$, 它的存在性可由下面命题得到.

定理 2.2.1 S 是 G 的一个子集, 设 $H_i (i \in I)$ 是群 G 中含 S 的所有子群, 则 $H = \bigcap \{H_i | i \in I\}$ 是含 S 的最小子群.

证明 首先 H 是含 S 的子群, 由于 I 不是空集, 由于 H_i 是子群, 显然 $S \subseteq H_i$, 若 $S \subseteq H_i$ 且 H_i 是子群, 则 H_i 是 H 的子集, 故有 $H_i \subseteq H$ 且 $H \subseteq H_i$.

此定理只是告诉我们含 S 的最小子群 H 是存在的, 然而不是构造性的, 所以对 H 的构成没有什么了解. 下面我们从构造的角度, 找出含 S 的最小子群 H .

如果 S 是子群, 那么 $S = S \cdot S = S \cdot S = \cdots = S$, 然此时 $H = S$. 如果 S 不是子集, 显然 S 是含 S 的最小子群. 如果 $S = \{a, b, \dots\}$ 有限, 那么 a^2, b^2, \dots 存在, 使得 $a^2 \in S$ 或 $a^2 \notin S$, 这时我们把这些元素都添加到 S 上去.

$H = \{x_1 x_2 \cdots x_n | n \text{ 是自然数}, x_i \in S \cup S^{-1}\}$.

这里我们考虑 S 的元素和 S^{-1} 的元素. 从 S 及 S^{-1} 中取出任意 n 个元素作乘积, 所得到的元素全体. 容易看出 $H \subseteq HH^{-1} = H, H^{-1} = H, \dots, H$ 是含 S 的子群. 另一方面, 若有了群 K 含 S , 则 $K^{-1} \subseteq K$, 从而 $S \cup S^{-1} \subseteq K$, 故有 $K^{-1} \subseteq K$. 这样 K 必包含 $S \cup S^{-1}$, 随之必包含 $S \cdot S \cup S \cdot S^{-1} \cup S^{-1} \cdot S \cup S^{-1} \cdot S^{-1}$, 故知 $K = H$, 也即 H 是含 S 的最小子群.

定义 2.2.1 群 G 中含 S 的最小子群称为 S 在 G 中生成的子群, 记作 $\langle S \rangle$.

设 H 是群 G 的一个子群, 如果子集 $S \subseteq H$ 且 $S^{-1} \subseteq H$, 则称 S 是子群 H 的一个生成元集;

特别地, 当 $S = G$ 时 $\langle S \rangle = G$ 时, 称 S 生成群 G , 称 S 是群 G 的一个生成元集.

当 S 是一个有限子集时, 我们称 H 为有限生成的. 特别地, 当 $S = \{a\}$ 是用一个元素 a, a^{-1} 或 1 生成时, 我们常以 $\langle a \rangle$ 代替 $\langle a, a^{-1} \rangle$. 一般地, $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ 代替 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1} \rangle$.

上边到阶为 n 的每一列或每一行, 每个群元素都会在其中出现且只出现一次, 即是 n 阶列或行的群元素互不相同. 在文氏图例子中, 图表的对角元素均为单位元. 在一般列或群表中, 元素未必互异. 是在 n 阶列或行找不出则表示中这种特殊形式的群表示形式, 又称: 陪集表、行陪集表.

定义 2.3.1 设子群 $H = \{h_1, \dots, h_m\} \subset G$, 且 $g \in G$, 则集合

$$gH = \{gh_1, gh_2, \dots, gh_m\}$$

称为元素 g 生成的子群 H 的左陪集, 而集合

$$Hg = \{h_1g, h_2g, \dots, h_mg\}$$

则称为元素 g 生成的子群 H 的右陪集.

例如, 在 S_3 中, $H = \{e, (12)\}$ 的左陪集为 $eH = H$, $(13)H = \{(13), (132)\}$.

陪集的最重要性质可由下述陪集定理表示之.

定理 2.3.2 陪集定理 同一子群 H 的左陪集或右陪集, 或者完全相同, 或者完全不同(交集为空集).

证明 若 H 由 e, h_1, h_2, \dots, h_m 生成, 则任一左陪集 gH 由任一陪集元素 gh_i 生成, 而 gh_i 的右陪集为 gh_iH . 设 $gh_iH = g_1H$, 则有

$$gh_iH = g_1H$$

(不要求 $h_i = h_j$, 但 $h_i, h_j \in H$), 则两边都乘以 $g_i^{-1}(\dots)h_i^{-1}$, 得

$$H = g_i^{-1}gH = g_1H.$$

由重排定理 $g_i^{-1}g_1H = H$, 亦即 $g_1H = g_i(g_i^{-1}g_1H) = g_1H$.

换言之, 陪集 g_1H 包含 g_iH , 故 g_iH 包含 g_1H . 证完. 集合

进一步有

定理 2.3.3 Lagrange 定理 任一元素 g 的子群 H 及其全部不相交的陪集的直和, 即群 G 的阶 n 必为子群 H 的阶 k 的整数倍.

证明 任取 $g_1 \in G$, 但 $g_1 \notin H$, 则由陪集定理

$$(H = EH, E \neq g_1), H \cap g_1H = \emptyset.$$

继续取 $g_2 \in G$, 但 $g_2 \notin H \cup g_1H$, 则陪集 g_1H 必有

$$g_2H \cap H = \emptyset, g_2H \cap g_1H = \emptyset.$$

如此, \dots, H 及其全部不相交的陪集 g_1H, g_2H, \dots 必不相交. 因 G 为有限群, 必然经过有限次(设为 m 次)后终结, 即

$$G = H \cup g_1H \cup g_2H \cup \dots \cup g_mH$$

其中每一个右陪集的元素个数均为 k (陪集 H 的元素为 k), 故有 $n = mk$.

推论 2.3.4 素数阶群只有平凡子群 $\{e\}$ 与自身 G .

其关键是利用元素的另一种分类方法, 其引入乃是因元素之间的等价关系. 集合 H

个).

例 2.3.9 群 $G = \{1, -1, i, -i\}$, 生成元有两种选择 $(i), (-i)$.

例 2.3.10 二维旋转群 $\{A(\theta)\}$.

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

其中 θ 为实参数, 其单位元

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

群运算为普通矩阵乘法, 或者容易验证, $A(\theta)$ 满足群的四公理. 此时群的生成元

$$X = \left[\frac{\partial A}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} = \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \bigg|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

一般群元可由 X 生成

$$A(\theta) = I + \theta X + \frac{1}{2!} \theta^2 X^2 + \frac{1}{3!} \theta^3 X^3 + \cdots \quad \text{将函数泰勒展开,}$$

由于

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I,$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -X,$$

则

$$A(\theta) = I + \frac{1}{1!} \theta X + \frac{1}{2!} \theta^2 X^2 + \frac{1}{3!} \theta^3 X^3 + \frac{1}{4!} \theta^4 X^4 + \frac{1}{5!} \theta^5 X^5 + \cdots$$

$$= I - \frac{\theta^2}{2!} I + \frac{\theta^4}{4!} I - \cdots + \left[\frac{\theta}{1!} X - \frac{\theta^3}{3!} X + \frac{\theta^5}{5!} X - \cdots \right]$$

$$= E \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots \right] + X \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \right]$$

$$= E \cos \theta + X \sin \theta$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \\ \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

定理 2.3.5 设 G 是一个群, γ 是 G 中的一个等价关系, 则等价类 Ka (a 为 G 的一个正规元, 且对 $\forall a \in G, a\gamma = Ka = aK$), 反之, 若 Ka 是 G 的一个正规子群, 令 γ 为 G 的关系 γ 为 Ka 等价, 则 γ 是一个正规关系, 且由这个正规关系确定的等价类 Ka 为 Ka .

证明 定理的前半部分已知. 现证. 下面证明定理的后半部分. 设 $a\gamma = Ka$, 则有 $b \in K, k \in K$, 使 $a = bk, b = bk$, 于是 $a = bk = (bk)\gamma = a\gamma$ 但 K 是正规子群, 故 $K = K/\gamma$.

从而对 $k, b \in Kb$, 存在 $k_1 \in K$, 使 $k_1 b = b k_1$.

于是 $a^{-1} = (a^{-1} k_1) k_1^{-1} = (a^{-1} k_1) k_1^{-1} a^{-1} k_1 = a^{-1} (k_1 k_1^{-1}) a$, 故 $a^{-1} b \eta a^{-1}$. 从而 η 是一个同余关系. 对这个同余关系,

$$a\eta = \{b \mid b = ak, k \in K\} = \{ak \mid k \in K\} = Ak = Ka.$$

设 $K = \{e\}$, 则对 $\forall a \in G$, $a^{-1} \in K$, 陪集 aK 与 K 是相同的, 以后我们统称为陪集.

若 $K = \{e\}$, η 为 K 等价, 于是 G/K 中 $a^{-1} = a^{-1} \cdot e$ 记作 $a^{-1}K$, 并称为 a 关于 η 的左陪集 K 的商群. 这样, G/K 中的运算是商集 $aK = aK$, \cdot , 乘法, 规则是 $(aK)(bK) = (ab)K$, $a^{-1}K$ 是 G/K 的恒等元, $(aK)^{-1} = a^{-1}K$.

最后, 我们给出判断一个子群 H 是否为 G 上左陪集的判别准则.

定理 2.3.6 对 G 的子群 H , $H < G \Leftrightarrow$ 对 $\forall a \in G$, 有

$$a \cdot H = H \cdot a, \quad h_1 a \in H \cdot H = H$$

证明 \Rightarrow 由于 $H < G$, 故对 $\forall a \in G$, 有 $a \cdot H = H \cdot a$. 设 $a = h_1 a + a = H a$, 则 $h_1 \in H$, 从 $a \cdot H = H \cdot a$ 知 $H \cdot H$. 故存在 $h_2 \in H$ 使 $h_1 \cdot h_2 = a \cdot h_2 \in H \cdot a = H \cdot H$, 故 $a = H a = H$.

\Leftarrow 设 $h_1 a \in H a$, 则 $h_1 \in H$, 从而 $a = h_1^{-1} \cdot h_1 a \in H \cdot a = H \cdot H$, 故存在 $h_2 \in H$ 使 $h_1 a = h_2$, 故 $h a = h_2 a \in H a$, 从而 $a \cdot H = H \cdot a$. 又 $a = h_1^{-1} \cdot h_1 a \in H \cdot a = H \cdot H$, 从而存在 $h \in H$, 使 $h a = h_1 a$, 故 $h a = a h_2 \in a H$, 从而 $H a \subseteq a H$.

综上所述 $H a = a H$.

定理 2.3.7 令 φ 是群 G 到群 H 的同态, 则有:

- 1) $\text{Im} \varphi$ 是群 H 的子群;
- 2) $\text{Ker} \varphi$ 是群 G 的正规子群.

证明 任取 $f, g \in \text{Im} \varphi = \varphi(G)$, $e \in G$, 则依集 $\text{Im} \varphi$ 的定义, 必有 $x, y \in G$, 使得

$$f = \varphi(x), \quad g = \varphi(y), \quad e = \varphi(e).$$

这时

$$f g = \varphi(x) \varphi(y) = \varphi(xy) \in \text{Im} \varphi,$$

$$f = \varphi(x) = \varphi(x) \varphi(e) = \varphi(xe) \in \text{Im} \varphi.$$

即集 $\text{Im} \varphi$ 是 H 的子群.

- 2) 任取 $g_1, g_2 \in \text{Ker} \varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$, 则

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2) = ee = e,$$

$$\varphi(g_1^{-1}) = \varphi(g_1)^{-1} = e^{-1} = e,$$

$$\varphi(a g_1 a^{-1}) = \varphi(a) \varphi(g_1) \varphi(a^{-1}) = \varphi(a) e \varphi(a)^{-1} = e,$$

即得 $\text{Ker} \varphi$ 是群 G 的正规子群.

定理 2.3.8 (群的第一同态定理) 1) 若群 H 是群 G 的正规子群, 则

$$\theta: L(G, H) \rightarrow L(\bar{G})$$

$$S \mapsto \varphi(S) = \varphi(S), \forall S \in L(G, H)$$

是集 $L(G, H)$ 到集 $L(\bar{G})$ 上的一个一一对应, 且有

- (1) $S \supseteq T$ 当且仅当 $\varphi(S) \supseteq \varphi(T)$;
- (2) S 是 G 的正规子群当且仅当 $\varphi(S)$ 是 \bar{G} 的正规子群;
- (3) 当 S 是 G 的正规子群时, 有 $G/S \cong \bar{G}/\varphi(S)$.

问题 2.3

1. 利用 1.1 节中的 1 对换, 对 C_n 和 C_n 群元进行分类.

2. 对 C_n 群和子群 L , m 完全积集合 $H = L \cup a$ 是正规子群吗?

3. C_n 子群 $H = L \cup C_n \setminus L$ 的 C_n 子群 C_n 中其商群 C_n/H .

4. 试由生成元 C_n, σ_n 生成群 C_n 所有的群元.

5. 对 C_n 子群 H 集合 C_n 且 C_n/H 是数, 相对 C_n 再复数乘法, 构成一连续群. 请找出该群的生成元, 并说明全部直元是什么.

6. 若 C_n 子群集合在加为乘法下构成群, 令其相应商表, 找到此群的一个正规子群, 并据此求商群.

7. 设 G 为群, $G' < H \leq G$, 证明: $H < G$.

8. G 为如下集合:

$$\{0, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\} \cup \{\omega^{-1}, \omega^{-2}, \dots, \omega^{-(n-1)}\}$$

且 ω 为 n 次单位根, $\omega^n = 1$, 且 $\omega \neq 1$, 其 ω 为 n 次单位根.

9. 设 Q 是有理数加群, Z 是整数加群, 证明:

(1) 对 Q 有 n 个素数 $p_1, p_2, \dots, p_n \in Q$, Q 有 n 个素数.

(2) Q 没有有素指数的子群, 且 Q/Z 没有有素指数的子群.

(3) Q 没有极大子群.

10. 设 G 是交换群, $G = \langle a, b, \dots, c \rangle$, 且 a, b, \dots, c 是两两不同的素数, 则 G 是循环群.

11. 设 H 是 G 的真子群, 证明 $G \neq gHg^{-1}$.

12. 设 H 是群 G 的子群, $M = H \cup g$, $g \notin H$ 和 $f: M \rightarrow M$ 是 M 上全体变换在合成下构成群. 此子群是正规子群, 且 $f(g) = g$, $f(h) = h$, $f(hg) = gh$.

$$f_h: M \rightarrow M, Hg \mapsto Hg,$$

求证: (1) 对 $\forall a, b \in G$, f_a 是 M 上的一个变换, 且 $f_a f_b = f_{ab}$.

(2) 如果 $a \in G$, $f_a \neq f$, 那么 a 是群 G 的 1 , $\text{Ker } f_a = \bigcap_{g \in G} Hg$.

§ 2.4 群的置换表示理论初步

我们说过同态是研究群之间关系的基本手段. 为了研究一个群 G , 自然希望有一些理想的“样板”群作为标准, 然后通过研究 G 与样板群的各种同态来把握 G 的特性. 理想的样板群有两类, 一类是置换群, 另一类是矩阵群. 一个群 G 到置换群的同态叫 G 的置换表示, 而到矩阵群的同态叫线性表示.

研究群的线性表示是群论的一个重要分支, 即通常所谓群表示理论, 它在物理、化学、力学等许多方面都得到重要应用.

本节的目的是介绍群的置换表示理论的一些基本知识.

定义 2.4.1 设 Σ 是一个集合, $S(\Sigma)$ 是 Σ 上的对称群, 群 G 到 $S(\Sigma)$ 的每个同态 $f: G \rightarrow S(\Sigma)$ 都叫做群 G 在集合 Σ 上的一个置换表示.

如果 f 是单同态, 则称 f 是忠实表示.

这时, 对于 G 中不同的元素, $f(a)$ 是 Σ 上不同的置换. 群 G 借助于置换表示 f 作用在集合 Σ 上, 也就是说, 元素 $a \in G$ 在集合 Σ 上的作用看成是置换 $f(a)$. 对于每个 $a \in \Sigma$, 定义 $ga = f(g)a$.

设 $\pi: G \rightarrow S(\Sigma)$ 是一个置换表示. 在 Σ 上 π 又给出的关系: 对于 $a, b \in \Sigma$, $a \sim b$ 当且仅当 $a, b \in G$, 使得 $ga = b$. 这是一个等价关系, 因为

- (1) $\pi(1)$ 是 Σ 的恒等置换, 从而对每个 $a \in \Sigma$, $1 \cdot a = a$, 故 $a \sim a$;
- (2) 如果 $a \sim b$, 则有 $g \in G$ 使得 $ga = b$, 于是 $a = g^{-1}b$, 故 $b \sim a$;
- (3) 若 $a \sim b$, $b \sim c$, 则有 $ga = b, hb = c$, 其中 $a, b \in G$, 于是 $(hg)a = c$, 故 $a \sim c$. 总之, \sim 是等价关系, 因为 G 是群.

定义 2.4.2 对 \sim 是等价关系, Σ 中元素 a 所在等价类 $\alpha = \{x \in \Sigma \mid x \sim a\}$ 称为一个等价类, 或简称轨道.

Σ 是 Σ 的并. 于是 Σ 分成一些轨道, 在同一轨道中, 可以通过某 $g \in G$ 的作用将一个元素变为另一个元素, 而不同轨道中的两个元素不可, 这样做.

定义 2.4.3 如果 G 在 Σ 上的作用只有一个轨道, 则称 G 在 Σ 上是传递的.

如果将 G 看成它在某一个轨道上的作用, 则 G 显然是传递的.

例 2.4.1 设 G 是群, 取 $\Sigma = G$ 作如下映射 $f: G \rightarrow S(G), f(g)a = ga$.

对每个 $a \in G$, 也就是说, 对于 $a \in G$, $f(a)$ 是集合 G 上的置换. 它将 G 的每个元素 a 变成 ga . 由群 G 上的右去律可知 $f(a)$ 是 G 上的置换. 由于

$$(f(g)f(g'))a = f(g)(f(g')a) = f(g)g'a = f(gg')a = f(gg')a,$$

从而 $f(g)f(g') = f(gg')$, 即 $f: G \rightarrow S(G)$ 是群的同态.

定理 2.4.4 G 为有限群, $G = \langle a \rangle$, $\text{ord}(a) = n$, 则 G 不是单群.

引理 2.4.5 设 G 为有限群, f 是 G 的最小素因子. 如果 $N = \langle G, G \cap N = \{e\} \rangle$, N 是 G 的正规子群.

证明 考虑 G 对于子群的诱导表示:

$$f: G \rightarrow S_p, \text{Ker} f = \bigcap_{a \in G} a^{-1}Na \leq N.$$

从有 $p = (G \cap N) \neq \{e\} \subseteq \text{Ker} f$, f 不整除 $f^{-1}(N) = \{e\}$, 故 $\text{Ker} f$ 同构于 S_p 的一个子群, 因此 p^2 除不尽 $|G/\text{Ker} f|$.

另一方面, $G/\text{Ker} f$ 没有比 f 大素因子, 由对 f 的假设, 也有比 f 小的素因子, 从有 $\langle \text{Ker} f \rangle = f$, 但是 $\langle G \cap N = f \rangle \subseteq \text{Ker} f = N$, 因此 $N = \text{Ker} f$, 于是 N 是 G 的正规子群.

问题 2.4

设 G 作用在集合 Σ 上, $\forall a, b \in \Sigma$, f 有在 Σ 中使得 $fa = b$, 且 $\langle f \rangle = \langle f^{-1} \rangle$. 换句话说, 同一轨道中元素的固定子群彼此共轭.

(1) 求下列物体上的方位、上下、物体、上下、物体和上下有体的对称群各有多少元素? 这五个对称群当中是否有同构的?

设群 G 在集合 Σ 上作用是传递的, N 是 G 的一个子群, 那么在 N 作用下, 每个轨道有同样多的元素.

设群 G 作用在集合 Σ 上, 表示 ρ 在 Σ 中轨道个数, 对任意 $a \in \Sigma$, f 表示 ρ 在 Σ 作用下不动点个数, $\sum_{a \in \Sigma} f_a = \rho$.

这就是说, G 的每个元素在 Σ 作用下不动点个数又是不变.

设 f 是一个素数, ρ 是 f 的方幂, 则群 G 在 Σ 上轨道子群的正数 (元素) 的倍数.

令 G 是单群, f 是素数, ρ 是 f 的方幂, 则 f 是 ρ 的因子, 且 $f \mid \rho$.

试证: 令 G 作用在 Σ 上, ρ 是 f 的方幂, 则 f 是 ρ 的因子.

N 是 G 的一个子群, ρ 是 f 的方幂, 则 f 是 ρ 的因子. 且 $f \mid \rho$.

设 G 是有限群, ρ 是 f 的方幂, 则 f 是 ρ 的因子. 且 $f \mid \rho$.

设 G 是有限群, ρ 是 f 的方幂, 则 f 是 ρ 的因子. 且 $f \mid \rho$.

设 G 是有限群, ρ 是 f 的方幂, 则 f 是 ρ 的因子. 且 $f \mid \rho$.

设 G 是有限群, ρ 是 f 的方幂, 则 f 是 ρ 的因子. 且 $f \mid \rho$.

$N(G)$ 平凡, 则 G 的 Sylow p 子群是正规的, 从而 $N(G) = G$. 若 $N(G) \neq G$, P, P', \dots, P' 是 G 的 $s-1$ 个不同的 Sylow p 子群, 它们互有任意交, 且互有非平凡交集, 合起来共占了 $s-1$ 个元素, 余下 $s-1$ 个元素组成 $N(G)$. 显然 $N(G)$ 的 Sylow p 子群, 从而 G 的 Sylow p 子群只有一个, 必为正规子群, G 不是单群.

定理 2.5.6 设 p 和 q 为素数, $q \nmid p-1$, 则 G 不是单群.

证明 若 $p \nmid q-1$, 则 G 的 Sylow q 子群 Q 是正规子群, 从而 G 有 p 阶子群, $N(G)$ 的子群 P 是正规的, 所以 G 不是单群.

如果 $p \mid q-1$, 则设 $p \mid q-1$, $N(G) = P$, $P \neq G$, 且 P 是 G 的 Sylow p 子群, 只能 $n_p = q-1$ 且 G 有 q 阶 Sylow q 子群, 它是正规子群, 于是 G 不是单群.

定理 2.5.7 设 p 和 q 为素数, $q \nmid p-1$, $p \nmid q-1$.

证明 若 $p \nmid q-1$, 则 G 的 Sylow q 子群 Q 是正规子群, 从而 G 有 p 阶子群, $N(G)$ 的子群 P 是正规的, 所以 G 不是单群.

如果 $p \mid q-1$, 则 $N(G) = P$, $P \neq G$, 且 P 是 G 的 Sylow p 子群, 从而 G 有 q 阶 Sylow q 子群, 它是正规子群, 于是 G 不是单群.

如果 $p \mid q-1$, 则 $N(G) = P$, $P \neq G$, 且 P 是 G 的 Sylow p 子群, 从而 G 有 q 阶 Sylow q 子群, 它是正规子群, 于是 G 不是单群.

定理 2.5.8 设 p 和 q 为素数, $q \nmid p-1$, $p \nmid q-1$.

证明 到目前为止我们已证明了下列诸结果:

(1) p, q 为素数, $q \nmid p-1$, $p \nmid q-1$, 则 G 不是单群.

(2) p, q 为素数, $q \nmid p-1$, $p \nmid q-1$, 则 G 不是单群.

(3) p, q 为素数, $q \nmid p-1$, $p \nmid q-1$, 则 G 不是单群.

在以上诸条件下, 我们已证明了下列诸结果: (1) p, q 为素数, $q \nmid p-1$, $p \nmid q-1$, 则 G 不是单群; (2) p, q 为素数, $q \nmid p-1$, $p \nmid q-1$, 则 G 不是单群; (3) p, q 为素数, $q \nmid p-1$, $p \nmid q-1$, 则 G 不是单群.

设 p, q 为素数, $q \nmid p-1$, $p \nmid q-1$, 则 G 不是单群. 若 $N(G) = G$, 则 G 有 p 阶子群 P , P 是正规子群, 从而 G 有 q 阶子群 Q , Q 是正规子群, 于是 G 不是单群. 若 $N(G) \neq G$, 则 $N(G) = P$, $P \neq G$, 且 P 是 G 的 Sylow p 子群, 从而 G 有 q 阶子群 Q , Q 是正规子群, 于是 G 不是单群. 类似地可证 24 阶群不单.

设 p, q 为素数, $q \nmid p-1$, $p \nmid q-1$, 则 G 不是单群. 若 $N(G) = G$, 则 G 有 p 阶子群 P , P 是正规子群, 从而 G 有 q 阶子群 Q , Q 是正规子群, 于是 G 不是单群. 若 $N(G) \neq G$, 则 $N(G) = P$, $P \neq G$, 且 P 是 G 的 Sylow p 子群, 从而 G 有 q 阶子群 Q , Q 是正规子群, 于是 G 不是单群.

是 p 的倍数.

3. 证明: 6 阶非交换群只有 S_3 .
4. 试证: 200 阶群 G 一定含有一个正规的 Sylow 子群.
5. 确定 S_4 的不同的 Sylow 子群的个数.
6. 确定 S_4 的自同构群 $\text{Aut} S_4$.

设 N 是有限群 G 的一个正规子群, 如果 p 和 $|G/N|$ 互素, 则 N 包含 G 的 n 个 Sylow p -子群.

8. 设 N 是有限群 G 的正规子群, P 是 G 的一个 Sylow p -子群, 试证:

- (1) $N \cap P$ 是 N 的 Sylow p -子群;
- (2) PN/N 是 G/N 的 Sylow p -子群;
- (3) $N_G(P)N/N \cong N_{G/N}(PN/N)$.

9. P_1, P_2, \dots, P_r 是有限群 G 的全部 Sylow p -子群, 如果 $\forall i=1, \dots, r$ 它由 $|P_i| \cdot |P_i|$ P_i $] \geq p^2$, 则 $N \equiv 1 \pmod{p^2}$.

10. G 是集合 Δ 上的置换群, P 是 G 的一个 Sylow p -子群, $a \in \Delta$, 如果 p 整除 $|G_a|$, 则 p^n 整除 $|Pa|$.

11. 令 G 是集合 Δ 上的置换群 $\forall x \in \Delta$, 设 P_x 是固定子群 $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ 的一个 Sylow p -子群, Δ 是 G 的 Sylow p -子群的集合, 则 G 在 P_x 的作用下, 全部不动点 Δ 是集合 $\{x \in \Delta \mid \forall P \in \mathcal{P}, P(x) = x\}$ 的传递闭包.

12. 设 G 为有限非交换群, $H, K \leq G, G = HK, P \in \text{Syl}_p(W(G))$, 求证: 存在 $U \in \text{Syl}_p(H), V \in \text{Syl}_p(K)$ 使得 $P = UV$.

13. 设 G 为有限群, 证明: 若 $P \in \text{Syl}_p(W(G))$, 则 $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.

§ 2.6 有限交换群的结构

本节我们将看到非常漂亮完整的有限交换群的结构定理, 由此我们将深刻地理解什么是群的结构理论.

本节我们表示 Ab 为“群的运算作加法” $+$, 简称 G 为加群.

在加群 G 中我们已知道有 $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ 的 $n \cdot g$ 的表示. 我们可以把它解释成 $\mathbb{Z} \times G$ 上的一个运算 \cdot , 即满足 $n \cdot g = n \cdot g$. 这个运算 \cdot 仍然满足下列性质: (1) $\forall g, h \in G, n, m \in \mathbb{Z}$, 有

- 1) $n \cdot (g+h) = n \cdot g + n \cdot h$;
- 2) $(n+m) \cdot g = n \cdot g + m \cdot g$;
- 3) $(nm) \cdot g = n \cdot (m \cdot g)$;
- 4) $1 \cdot g = g$.

这样,加群 $(G, +)$ 就变成一个与数域 F 上向量空间 V 相类似的对象了,只不过在向量空间中讨论线性和时其系数取自数域 F ,而对加群 $(G, +)$ 而言,线性和 $m \cdot x + \cdots + n \cdot x$ 系数只能取自整数环 \mathbb{Z} .

加群 $(G, +)$ 和向量空间 V 有许多性质是很相近的,例如向量空间 V 的基本概念,两个向量等价的概念等都可以平移到加群 G 上来.

设子集 $H = \{h_1, \dots, h_s\} \subseteq G$, 规定

$$\mathbb{Z} \cdot H = \{n_1 \cdot h_1 + \cdots + n_s \cdot h_s \mid n_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq s\}$$

有 $\mathbb{Z} \cdot H = H$, 且 $\mathbb{Z} \cdot H$ 就是 H 生成的子群. 当 $H = \{x\}$ 时, $\mathbb{Z} \cdot x$ 是 G 的生成元, $G = \mathbb{Z} \cdot H = \mathbb{Z} \cdot \{g\} = \mathbb{Z} \cdot g$.

下面的概念在结构理论中起重要作用.

定义 2.6.1 设 $(G, +)$ 为群, $H_1, \dots, H_s \subseteq G$ 为子群, 如果

1) $G = H_1 + \cdots + H_s$, 即每一个 g 可表示成 $h_1 + \cdots + h_s, h_i \in H_i$;

2) 上面的表示方法是唯一的, 即对 $\forall g \in G$, 由

$$g = h_1 + \cdots + h_s = h'_1 + \cdots + h'_s,$$

其中 $h_i, h'_i \in H_i$, 一定有 $h_i = h'_i, i = 1, 2, \dots, s$.

称 $(G, +)$ 为子群 H_1, \dots, H_s 的直和, 记为 $G = H_1 \oplus \cdots \oplus H_s$, 也称 $(G, +)$ 为直和 H_1, \dots, H_s 的直和.

显然, 直和子群与子群相同的直和是平凡直和的概念.

下面是一些经常用到的事实:

引理 2.6.1 在加群 G 中,

1) 若 $g \in \langle g_1, \dots, g_s \rangle$, 则 $g = t_1 g_1 + \cdots + t_s g_s, t_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, s$;

2) 若元素 g 的阶为 s , 而 $(s, t) = d$, 则 tg 的阶为 s/d ;

3) 若 $g_1 + \cdots + g_m = 0$ 且 g_i 的阶 s_i 两两互素, 则每个 $g_i = 0$.

证明 1) 由 $g \in \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ 知 $g = t_1 g_1 + \cdots + t_s g_s, t_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, s$.
 的阶亦为 s .

显然 $\langle tg \rangle \subseteq \langle g \rangle$, 由 $(s, t) = 1$, 存在 $u, v \in \mathbb{Z}$, 使得 $su + tv = 1$, 则

$$g - 1g = (su + tv)g = u(sg) + v(tg) = v(tg),$$

说明 g 可以由 tg 表示, 即 $\langle g \rangle \subseteq \langle tg \rangle$, 所以 $\langle tg \rangle = \langle g \rangle$;

2) 证略;

3) 设 m 为 s_1, \dots, s_m 的最小公倍数, 不妨设 $m = s_1 \cdot \cdots \cdot s_m$, 对任意 $i = 1, 2, \dots, m$, 由 $s_i \mid m$ 知 $g_i = \frac{m}{s_i} g_i$ 的阶为 s_i , 故 $\frac{m}{s_i} g_i = 0$, 又由 $g_1 + \cdots + g_m = 0$ 知 $g_1 = -g_2 - \cdots - g_m = 0$, 从而也有 $g_m = 0$.

定理 2.6.2 设 $(G, +)$ 为加群, $(G, +) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$, 其中 f_i 为不同素数, 则

1) $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_t$, 其中 H_i 是 p_i -群, $i = 1, \cdots, t$;

2) 若 $G/H = H_1/H \oplus \cdots \oplus H_t/H = H_1/H \oplus \cdots \oplus H_t/H$, 其中 $H_1/H, H_t/H$ 是 p -群, $t = 1, \cdots, t$, 且对 $\forall i$, 有 $H_i = H_i'$.

证明 1) 对 $\forall i = 1, \cdots, t$, 令 $n_i = p^{a_i} = |H_i|$, $H_i = \langle g_i \rangle$, 由 H_i 的阶是 p^{a_i} 的幂, 那么 $H_i = \{g \in G | n_i g = 0\}$, 则 H_i 是 G 的子群, 从而得

$$H = H_1 + H_2 + \cdots + H_t = \langle g_1 \rangle + \cdots + \langle g_t \rangle = \langle g_1, g_2, \cdots, g_t \rangle$$

是 G 的子群, $\forall g_i \in H_i$, $i = 1, 2, \cdots, t$, 由拉格朗日定理, 由高等代数知, 存在整数 n_1, \cdots, n_t , 使得 $\sum_{i=1}^t n_i g_i = 0$, $n_i g_i = \sum_{j=1}^t n_{ij} g_j$, 且 $n_{ii} \equiv 1 \pmod{p}$, 故

$$g_i = n_{i1} g_1 + n_{i2} g_2 + \cdots + n_{it} g_t, \quad i = 1, 2, \cdots, t,$$

故 $g_i \in H_1 + H_2 + \cdots + H_t = H$, 于是 $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_t = H$, 从而 $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_t$.

2) 由定义 2.6.1 中的一些等价子群 H_1, \cdots, H_t , 且 $H_i \cap H_j = \{0\}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots, t$, 由这是或交的, 又因为 H 是 H_1, H_2, \cdots, H_t 的解, 所以, $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_t$.

由 1) 命题也有有限群的解法, 对有限 p -加群的研究

设 G 为 p -加群, $|G| = p^n$, p, n 是素数, 我们更精细地分解 G , 则 $G/Z_G = Z_{p^k}$ 是循环群, 则 G 不能再分解, 因为若

$$G = Z_{p^k} \oplus Z_{p^k}, \quad |Z_{p^k}| = p^{n_1}, \quad |Z_{p^k}| = p^{n_2},$$

其中 $n_1 + n_2 = n$, 则 $p^{n_1} + p^{n_2} = p^n$, 矛盾, 所以 G 不能再分解. 这样从直和的项来看, 循环 p -加群是最基本可约化了, 这相当于最简矩阵的事了, 同时, 最好的结果将是把 p -加群 G 表成循环群的直和.

设我们有 $G = Z_{p^{a_1}} \oplus \cdots \oplus Z_{p^{a_r}}$, 我们想问直和 $Z_{p^{a_1}} \oplus \cdots \oplus Z_{p^{a_r}}$ 的生成元在 G 中有什么特殊的地方? 和 $Z_{p^{a_i}}$ 的关系使我们回到 $Z_{p^{a_i}}$ 和 $Z_{p^{a_j}}$ 的生成元集合 S_i 与 S_j 之间的某种比较, 在 $Z_{p^{a_i}}$ 中, 生成元 S_i 数最少的生成元集合, 我们称 S_i 是 $Z_{p^{a_i}}$ 的阶为 p^{a_i} 的生成元集合 S_i , $i = 1, 2, \cdots, r$, 有什么“极端”的矩阵?

定义 2.6.2 设 a_1, \cdots, a_r, p, n , $r \geq 1$, $Z_{p^{a_1}} \oplus \cdots \oplus Z_{p^{a_r}}$ 是 p -加群, 素数 p 相等, 生成元集合 S_i 相应的阶集依次为

$$f_1, \cdots, f_r, \quad f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_r,$$

如 $a_1 = n_1, \cdots, a_r = n_r$, $f_1 \leq \cdots \leq f_r$, 我们就说生成元集合 S_1, \cdots, S_r 小于生成元集合 S_1, \cdots, S_r .

定理 2.6.3 G 为有限 p -加群, $|G| = p^n$, 则有

1) $G = Z_{p^{a_1}} \oplus \cdots \oplus Z_{p^{a_r}}$;

2) 若 $G = Z_{p^{a_1}} \oplus \cdots \oplus Z_{p^{a_r}} = Z_{p^{b_1}} \oplus \cdots \oplus Z_{p^{b_s}}$, 则必有 $r = s$, 且适当排列脚标, 有 $a_i = b_i$, $i = 1, \cdots, k$.

一个阶循环群和一个阶循环群的直和. 为了回答这个问题, 我们引入

定义 2.6.3 (外直积的定义) 设群 G_1, \dots, G_n , 令集合

$$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n,$$

有规则集 G 中的一个二元运算如下 (对 $g = (g_1, \dots, g_n), h = (h_1, \dots, h_n) \in G$), 这里 $g_i, h_i \in G_i$ 是群 G_i 中的乘积. 直接验证 $(G, *)$ 是一个群, 称之为群 G_1, \dots, G_n 的(外)直积, 记作

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n.$$

特别, 当 G_i 是交换群时, G 也是交换群. 这时我们常把 G 写成 $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$, 而称之为加群 G 的(外)直和.

这时 G 的运算用加法写成

$$(g_1, \dots, g_n) + (h_1, \dots, h_n) = (g_1 + h_1, \dots, g_n + h_n),$$

令

$$e = (e_1, \dots, e_n), \quad g_i = e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

则 e 是 G 的因子群, $G = \langle e \rangle$, 有 G 是其子群 $\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle$ 的内直和. 在这个意义下, 内直和与外直和是等价的, 虽然内直和概念是属于结构理论的, 而外直和属于构造理论的.

上面的讨论清楚地, 等于刚才所提出的问题关于有限群的存在问题. 总结以上我们有下面这个漂亮的结果.

定理 2.6.4 (有限交换群结构定理) 有限群 G 唯一地分解为素数阶循环群的直和, 即设 $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$, p_i 是不同素数, 则

$$G \cong \langle p_1^{a_1} \rangle \oplus \langle p_1^{a_2} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle p_1^{a_{r_1}} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle p_r^{a_{r_1}} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle p_r^{a_{r_{r_1}}} \rangle, \quad \text{其中 } p_i \text{ 是 } p_i^{a_i} \text{ 阶循环群.}$$

2) 自然数集 $\{p_1^{a_1}, \dots, p_1^{a_{r_1}}, p_2^{a_1}, \dots, p_2^{a_{r_2}}, \dots, p_r^{a_1}, \dots, p_r^{a_{r_r}}\}$ 由群 G 唯一确定.

这是一个很值得欣赏的结构定理. 可以和算术基本定理相比. 那里表示任意整数的基本构件是“素数”, 构造方法是“乘积”, 而又平明是表示任意有限群的基本构件是“素数阶阶的循环群”, 构造方法是“直和”. 在整数论中, 自然数 n 的分解是

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r},$$

则在交换群论中, 有限加群 G 的阶 $|G| = n$ 的分解是

$$G \cong \langle p_1^{a_1} \rangle \oplus \langle p_1^{a_2} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle p_1^{a_{r_1}} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle p_r^{a_1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle p_r^{a_{r_r}} \rangle.$$

问题 2.6

1) 设 H_1, H_2, \dots, H_r 是 G 的子群. 如果 G 是 H_1 和 H_2 的内直积, 也是 H_1 和 H_3 的内直积. 求证: 有群同构 $H_1 \cong H_2 \cong H_3$. 试举反例说明: 也非 $H_1 \cong H_2$.

2) 设群 G 是循环子群 $\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle$ 的内直积. 如果每个 a_i 的周期 m_i 都是正整数,

是 G 的合成群列.

无限群不一定有合成群列. 例如, 令 G 是无限循环群, 因为 G 的每个非平凡子群均为无限循环群, 因而均同构于 G , 由于 G 是无限群, 故任一非平凡子群均同构于 G , 的合成群列的最后非平凡项必为 G 的单子群, 因而不存在包含 G 的合成群列.

引理 2.7.2 设 $N \trianglelefteq G$, 若 G 有合成群列, 则 N 也有合成群列.

证明 设 $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = G$ 是 G 的合成群列. 令 $N_i = N \cap G_i$, 对任意 i , 这样得到 N 的一个子群列 $N = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_r = N$. 固定某 i , 易见 $N_i \trianglelefteq N_{i+1}$, $N_i \cap G_i = (N \cap G_{i+1}) \cap G_i$ 及第一同构定理得

$$N_i \trianglelefteq N_{i+1} \trianglelefteq N \cap G_i \trianglelefteq N \cap G_{i+1} \trianglelefteq N \cap G_i \trianglelefteq G_i \trianglelefteq G_{i+1}$$

设 $\varphi_i: G_{i+1} \rightarrow G_{i+1}/G_i$ 为自然同态, 则

$$N_i \cap G_i \trianglelefteq G_i \trianglelefteq G_{i+1} \xrightarrow{\varphi_i} N_i \cap G_i \trianglelefteq G_i \trianglelefteq G_{i+1} \xrightarrow{\varphi_i} G_i \trianglelefteq G_{i+1}$$

因而 $N_i \trianglelefteq N_{i+1}$ 同构于单群 G_{i+1}/G_i 的一个正规子群, 因此 $N_i \trianglelefteq N_{i+1}$ 或 $N_i = N_{i+1}$. 若 $N_i = N_{i+1}$, 则 N_i 为单群, 所以 N 的子群列 $N = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_r = N$ 中的重复项 N_i , 就得到 N 的一个合成群列.

设 $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_r = G$ 是合成群列, $1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_s = G$ 是长度为 s 的另一个合成群列, 称 G 的群列长相等.

若存在 $\pi \in S_r$, 使对每个 $i, G_i/G_{i-1} \cong H_{\pi(i)}/H_{\pi(i)-1}$.

例如, $1 = G_0 \trianglelefteq Z_2 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_2 \trianglelefteq G$, 考虑合成群列 $G_2/G_1 \trianglelefteq G/G_1 \trianglelefteq G/G$, 有 $H_2/H_1 \trianglelefteq G/G$.

由于 $G/G_1 \trianglelefteq H_2/H_1 \trianglelefteq Z_2 \trianglelefteq G/G_1 \trianglelefteq G/G_1 \trianglelefteq H_1/Z_2$, 取 $\pi = (1, 2)$, 就得到等价.

在等价的意义下, 一个群只有唯一合成群列. 因此, 有合成群列的群其合成因子构成的集合是唯一确定的. 因此地合成因子子集直接易得到. 对任意群 G , 若 G 的合成因子均是单群, 所以在研究任意有限群时, 首先研究有限单群. 这一节好与群解.

Jordan-Holder 定理 若群 G 有合成群列, 则 G 的任何两个合成群列有相同的长度, 且它们等价.

证明 设 $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_r = G$, $1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_s = G$ 是 G 的两个合成群列. 对 r 作归纳法. 若 $r=1$, 则 G 是单群.

显然, $1 < G$ 是 G 的唯一的合成群列.

设 $r > 1$, 且对任意合成群列长度小于 r 的群来说, 结论成立. 若 $G_1 = H_1$, 则 G_1/G_0 与 H_1/H_0 为 1 和 G_1/G_0 的合成群列. 由归纳假设得 $r-1$ 且 G_1/G_0 的两个合成群列等价, 从而 G 的这两个合成群列等价.

下设 $G_1 \neq H_1$. 由于 $G_1 \trianglelefteq G$, $H_1 \trianglelefteq G$, 则 $G_1 H_1 \trianglelefteq G$. 但 G_1, G_0 是单群, 故不能有 $G_1 H_1 = H_1$, 从而 $H_1 \trianglelefteq G_1 H_1$. 由 $G_1 H_1$ 的单性得 $G_1 H_1 \trianglelefteq G$, 令 $K = G_1 \cap H_1 \trianglelefteq G$. 由第一同构定理

可知 $G/G_1 \cong H/K$, $G/G_2 \cong H/K$; 特别地, G/G_1 与 G/G_2 同构. 由定理 2.7.2 可知 H 有合成群列, 不妨设 $H = K_1 \leq \cdots \leq K_r = H$ 为 H 的一个合成群列.

现在得到 G_i 的两个合成群列

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_r \text{ 和 } 1 = K_0 \leq \cdots \leq K_r = K \leq G_i$$

它们的长度分别为 $r_1 = r+1$ 和 $r_2 = r$. 由归纳假设得 $r_1 = r_2$, 且这两个合成群列等价. 同理可得 H_i 有两个合成群列

$$1 = H_0 \leq \cdots \leq H_2 \leq H_i \text{ 和 } 1 = K'_0 \leq \cdots \leq K'_r = K \leq H_i$$

长度分别为 $r_1 = r+1$ 和 $r_2 = r$. 由归纳假设得 $r_1 = r_2$, 且这两个合成群列等价.

结合上面得到的同构可知, 合成群列

$$K = \cdots = K_{r-1} \subset G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_r = G \text{ 和 } 1 = K_0 \subset \cdots \subset K_r = H = H_i \subset G$$

等价, 所以由 G 原来的两个合成群列等价.

合成群列仅仅是在理论研究中起着很重要作用的一类子群列, 下面我们介绍更一般的一些子群列.

定义 2.7.3 群 G 的子群列 $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{n-1} \leq G_n = G$ 称为次正规群列. 对 $\forall i$, 有 $G_{i+1} \triangleleft G_i$.

定义 2.7.4 一个次正规群列称为正规群列, 若 $\forall i \leq n-1$, 有 $G_{i+1} \triangleleft G$.

一个正规列是次正规群列的一个特例. 此外, 因为任何一个正规群列可能有平凡商群因子, 或者有非平凡商群因子, 但不是单群.

定义 2.7.5 两个长度相同的次正规群列称为等价, 若它们满足合成群列等价定义中所给出的条件.

定义 2.7.6 一个给定次正规群列 π 上插入子群所得到的新的次正规群列称为原来次正规群列的加细.

若在插入的项上至少有一个在原来群列中没有出现, 称为真加细. 若有合成群列 π 是没有重复项的且没有真加细的次正规群列.

定义 2.7.7 群 G 的正规群列称为 π -群列. 若次正规群列中没有重复项, 且任意两项之间不能插入其他正规子群 (注意, 一个正规群列没有真加细的次正规群列, 正规群列是没有真加细的正规群列).

定义 2.7.8 群 G 的正规群列中相邻两项商群的商群称为 G 的 π -因子. 一个正规群列称为 π -因子 π 若它同构于群 G 的 π -正规群列的一个子因子.

从正规群列 π 中任意取出 $r+1$ 项 G_0, G_1, \dots, G_r 组成的任意两个子群列都有相同的长度, 且等价于由对类似于合成群列 π 中的 G_i 的 G_{i+1}/G_i .

这两个结论是群 G 的 π -因子 π 和 π 的 π -正规群列的特殊情形.

定义 2.7.9 称 π 为群 G 的极小 π -因子群. 若 $\pi \cap \pi' = \{1\}$, $\pi \cup \pi'$ 不真包含 G 的 π -平

凡正规子群.

注意: 1. 凡有限群有极小正规子群, 单群的唯一极小正规子群是它自身.

定理 2.7.3 有限群有主群列.

证明 设 G 是有限群, 对 $|G|$ 作归纳法. 若 G 为单群, 则 $1 < G$ 是 G 的主群列. 否则, G 有非平凡极小正规子群 N . 由归纳法设, G/N 有主群列. 由对称定理可知这一群列有形式:

$$1 < G_1/N < \cdots < G_i/N < G_0/N = G/N$$

其中 $\forall i, G_i/N < G_i$, 且 G_i 在 $G_i/N < G_i$ 之下没有 G_i 的真子正规子群. 由于 N 是 G 的极小正规子群, 故 $1 < N = G_0 < \cdots < G_i < G_0 = G$ 是 G 的主群列.

由上述定理, 有限群的构成, 对于有限单群. 在本节的最后, 我们来讨论有限群的子因子. 首先有下面的引理.

引理 2.7.4 G 有主群列, 则 G 的每一个因子是 G 的某商群的极小正规子群.

证明 若 $G_1 = G, G_2 = G_1/N_1, G_3 = G_2/N_2, \dots, G_{i+1} = G_i/N_i$ 是主群列, 由对称定理, 每个 G_i/G_{i+1} 是 G/G_{i+1} 的极小正规子群.

定理 2.7.5 有限群 G 的极小正规子群 N_1, N_2, \dots, N_r 互不相交.

证明 设 G 是有限群, N 为 G 的极小正规子群. 设 N_1 是 N 的极大正规子群, 则 $N_1 \triangleleft N$ 是单群. 设 N_2, N_3, \dots, N_r 是 N 在 G 上的正规子群. 由于 $N_1 \triangleleft G$, 故存在 N 为 N_1 的极大正规子群. 令 $N_1 \cap N_2 = N_3 = \cdots = N_r = N_{12}$, 则 $N_1 \cap N_2 \triangleleft N_1$ 到 N_1/N_{12} 的映射 $\varphi_{12}: N_1/N_{12} \rightarrow N_1/N_{12}$ 是同构映射, 说明 N_{12} 在 N_1/N_{12} 上是正规子群. 由于 N_1/N_{12} 是 N_1 在 G/N_{12} 上的正规子群, 故 $N_{12} \triangleleft N_1$. 类似地, $N_{12} \triangleleft N_2, \dots, N_{12} \triangleleft N_r$, 故 $N_{12} = 1$, 即 $N_1 \cap N_2 = \cdots = N_r = 1$.

$$g(N_1 \cap \cdots \cap N_r)g^{-1} = G N_1 g^{-1} \cap \cdots \cap G N_r g^{-1} = N_1 \cap \cdots \cap N_r,$$

$$g(N_1 \cap \cdots \cap N_r)g^{-1} \triangleleft N_1 \cap \cdots \cap N_r \triangleleft N_1 \cap \cdots \cap N_r, \text{ 故 } N_1 \cap \cdots \cap N_r = 1.$$

从而 N_1, N_2, \dots, N_r 是同构于 N_1/N_{12} 的某些群的直积. 从而 $N_1 \cap \cdots \cap N_r = 1$, 即得结论成立.

注意: 1. 当 $r=1$ 时, 显然成立. 设 $r=2$, 且对 $|N_1|$ 归纳成立. 若 $N_1 \cap \cdots \cap N_r \triangleleft N_1$, 则 $N_1 \cap \cdots \cap N_r = N_1 \cap \cdots \cap N_{r-1}$, 结论显然成立.

因此我们假设 $N_1 \cap \cdots \cap N_{r-1} \not\triangleleft N_r$, 此时

$$N_r < (N_1 \cap \cdots \cap N_{r-1}) N_r < N.$$

又由于 N_r 是 N 的极大正规子群, 必有

$$(N_1 \cap \cdots \cap N_{r-1}) N_r = N$$

$$N_1 \cap \cdots \cap N_{r-1} \cap \cdots \cap N_r = N_1 \cap \cdots \cap N_r \triangleleft N_1 \cap \cdots \cap N_r \triangleleft N_1 \cap \cdots \cap N_r,$$

但由第一同构定理有

$$(N_1 \cap \cdots \cap N_{r-1}) / (N_1 \cap \cdots \cap N_{r-1}) \cap N_r.$$

$$N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1} \cap N_i \cap N_{i+1} \cap \cdots \cap N_r$$

类似地有

$$N_i / (N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1}) \cap N_i$$

$$\cong (N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1}) N_i / (N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1}) = N_i / (N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1}).$$

由归纳假设即得结论成立.

推论 2.7.6 有限群的主因子是同构单群的直积.

问题 2.7

1. 证明: 交换群 G 有合成群列当且仅当 G 是有限群.

2. 对于 $n \geq 2$, 决定 S_n 的所有合成群列和主群列.

3. 证明: 有合成群列的群一定有主群列.

4. H 为有限群 G , 证明 G 有一个合成群列, 它的其中一项是 H .

5. 证明: 若下列条件之一成立, 则群 G 不是单群:

(1) $|G| = p^a(p+1)$, 其中 $a \geq 1$;

(2) $|G| = p^a(p+3)$, 其中当 $p=2$ 时, $a \geq 3$; 当 $p \geq 3$ 时, $a \geq 1$;

(3) $|G| = p^a(p^2-1)$, 其中 $a \geq 1$, p 为奇素数.

6. 若 $|G| \in \{30, 56, 105, 132\}$, 则 G 不是单群.

7. 设 G 为有限群, $H = \langle G, P \rangle \cong \text{Sym}(HP)$, 1. 问: 若 $N = \langle P \rangle = H$, 则 $P \in \text{Sylow}(G)$.

8. 证明: p^2 阶群是交换群, 其中 p 为素数.

设 P 为有限 p -群, N 为 P 的交换子群中的极大子群, 证明 $N = C_P(N)$.

§ 2.8 可解群

上节我们引进了群的各种子群列的概念. 本节将利用子群列来研究群. 特别地, 利用子群列来定义一类重要群——可解群 (solvable group) 的概念. 研究一次及二次方程的根式解问题, 他说明了三次方程有根式解当且仅当这一方程的 Galois 群是可解群, 因而可解群是令人感兴趣的. 类群. 本节将考察这类群及其相关群类.

定义 2.8.1 设 G 是群, 令 $G^{(0)} = G$. 对 $i \in \mathbb{N}$, 定义 $G^{(i)}$ 为 $G^{(i-1)}$ 的导群, 所得到的群列称为 G 的导群列.

对 $\forall i \in \mathbb{N}$, $G^{(i)}$ 为 $G^{(i)}$ 的特征子群; 导群列是 G 的一个正规群列, 而且导群列中任意相邻两群的商群都是交换群.

定义 2.8.2 称一个群为可解群, 若它的导群列终止于 1. 可解群的定义是 Galois

1870年在研究多项式的根式解过程中提出的,事实上,这就是“可解”这一术语的来源).

由于一个群为交换群当且仅当其子群为 \leq 易见,交换群为可解群.但是并不是所有群都可解.例如, A_5 不是可解群.由于单群几乎全是 \geq 子群,有可解群有许多.反之,故可解群可认为是与单群相反的一概念.如果这一思想正确的话,那么就应该有很多的群既是单群又是可解群,事实上,是如此.

定理 2.8.1 可解单群为素数阶循环群.

证明 设 G 为可解单群,由于 G 是可解群,故 $G = G_0$,又对 G 是单群,故 $G = G_1$,从而 G 为交换群.但由于交换单群的每个非单位元必是生成元,故 G 必为素数阶循环群.

下面给出可解群的一些性质.

定理 2.8.2 设 G 是群,则下列条件等价:

(1) G 是可解群;

(2) G 有一个正规群列,其相邻两商群为素数阶交换群;

(3) G 有一个次正规群列,其相邻两商群的商群为交换群.

证明 (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)显然,故只需证(3) \Rightarrow (1).

设 $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = 1$ 为 G 的次正规群列,任意相邻两群构成的商群为交换群,从而 $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$.要证明 G 可解,只需证 $\forall i, G_i/G_{i+1} \trianglelefteq G_i/G_{i+2}$ 成立即可.

对 i 用归纳法.由于 G_0/G_1 交换,且 $G_1 \trianglelefteq G_0$,故 $G_0/G_1 \trianglelefteq G_0/G_2$,从而 $G_0/G_1 \trianglelefteq G_0/G_2$,且 $G_1/G_2 \trianglelefteq G_1/G_3$,故 $G_1/G_2 \trianglelefteq G_1/G_3$.

下面我们考察一下与可解群相关的一些群的可解性.

定理 2.8.3 设 G 是群,则:

(1) 若 G 可解, $H \leq G$, 则 H 可解;

(2) 若 G 可解, $N < G$, 则 G/N 可解;

(3) 若 $N < G$, 且 $N, G/N$ 可解, 则 G 可解;

(4) 若 G, H 可解, 则 $G \times H$ 可解.

证明 (1) 由于对 $\forall k$, 有 $H^{(k)} \leq G^{(k)}$, 故(1)成立;

(2) 存在正规群列

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_r = 1,$$

使得对每个 i , G_i/G_{i+1} 为交换群, 考虑群列

$$G/N \supseteq G_1/N \supseteq \cdots \supseteq G_r/N = 1,$$

对 i 某个 i , 由于 $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$, 故 $(G_i/N) \trianglelefteq (G_{i+1}/N)$, 从而 $G_i/N \trianglelefteq G_{i+1}/N$, 由于 $G_i/N \trianglelefteq G_i/G_{i+1}$, 由第一和第二同构定理可得

$$G_i \triangleleft N \triangleleft G, N \triangleleft G, N \triangleleft G, G \triangleleft G \cap G_i \triangleleft N$$

又由第一同构定理知, $G_i/G \cong (G_i \cap N)/N$ 同构于交换群 G_i/G 的一个商群, 因此是交换群. 这样我们构造出 G/N 的一个正规群列, 且任意两群构成的商群均为交换群, 由定理 2.8.2 知 G/N 可解;

(3) 存在次正规群列

$$N = N_0 \geq N_1 \geq \cdots \geq N_r = 1$$

和

$$G \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_{r-1} \triangleleft \cdots \triangleleft G_r \triangleleft N = 1,$$

对 $\forall i, N_i/N_{i+1}$ 交换, 且 $(G_i/N)/(G_{i+1}/N) \cong G_i/G_{i+1}$ 也交换.

易见

$$G/G \triangleleft G_1/G \triangleleft \cdots \triangleleft G_{r-1}/G \triangleleft \cdots \triangleleft G_r/G = 1$$

是 G 的次正规群列, 且任意两群构成的商群均为交换群, 故 G 为可解群;

(4) 此时 $H/H \triangleleft H/H \triangleleft \cdots \triangleleft H/H$ 为子群列, $G/H \triangleleft H/H \triangleleft \cdots \triangleleft H/H$ 为可解. 由 (3) 知, $G \times H$ 可解.

由定理 2.8.1 知, 称 S_3, S_4, S_5 均为可解群, 但 S_6 不是可解群.

定理 2.8.4 有合成群列的群是“有限”已知的“有合成因子为素数”群.

证明 设 G 是有合成群列的群, 若 G/H 有合成因子为素数 p 的, 则这个合成群列为 G/H 的一个次正规群列, 且任意两群构成的商群均为交换群, 由定理 2.8.2 知, G/H 可解. 反之, 设 G 是可解群, H/H 为 G/H 的合成因子, 其中 $H/H \triangleleft G/H$, 由定理 2.8.1 知, G/H 可解, 故 H/H 为 G/H 的正规子群, 由定理 2.8.1 知, H/H 为素数阶.

易见, 存在有限个不可解的群, 故 S_6 没有有限交换的正规子群, 故 S_6 无合成群列为 $S_6/H \triangleleft \cdots \triangleleft H/H$, 没有合成群列的群有可能为可解群, 例如, 无限交换群是可解群, 但 S_6 没有合成群列.

定理 2.8.5 有限 p 群是可解群.

证明 由于有限 p 群的合成因子为单群, 即为 p 群, 故为素数阶群, 由定理 2.8.1 得结论成立.

由定理 2.8.4 知, 可解群列所有合成因子为素数阶, 那么如果有主群列的群是可解群的话, 它的每个主因子又怎样呢?

定义 2.8.3 设 p 是素数, Z_p 是 p 阶循环群, n 是正整数, 则 p 个循环群 Z_p 的直积 $Z_p \times Z_p \times \cdots \times Z_p$ 称为 p^n 阶初等交换 p 群.

容易验证, 有限交换群 G 是初等交换 p 群的充要条件是 $\exp(G) = p$.

定理 2.8.6 有主群列的群是可解群. 已知“主因子为初等交换 p 群”.

证明 设群 G 有主群列, 若 G 的每个主因子为初等交换 p 群, 则可加细群 G 的

知 G 有 m 个 p -子群, 若 $p = 2$, 则由 $G/H \cong N \times (m-1)$ 个 p -子群 H/H 及 $H \cong m \times N$ 是素数 p 的倍数, 从而 G/H 有 m 个 p -子群, 从而 G 已有 m 个 p -子群. 若 $p \neq 2$, 则 N 是 p -子群的 p -子群, $H/H \cong N \times (m-1)$ 个 p -子群, H/H 有 m 个 p -子群, 从而 G 已有 m 个 p -子群. 定理可知结论成立.

[illegible][illegible]

Burnside 定理 设 G 是阶 n 的群, p_1, p_2, \dots, p_r 是 n 的素因子, $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, 则 G 的共轭类数 $k(G)$ 满足

可解,且 A 就是一个反例.

Feit-Thompson 定理 奇阶群是可解群.

又, 由引理 1, “奇”定理, 定理 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 提出的猜想, 作为正论, 易见奇阶单群只能是素数阶循环群.

定理 2.8.9 设 $G = \langle S, \{ \cdot \} \rangle$ 为群, $f \in \text{Aut } G$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $\langle S, \{ \cdot, f \} \rangle$ 是可解群.

定理 2.8.10 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, $f: I \rightarrow X$ 是 I 上的函数, $a \in I$, $\{t_n\} \subset I$, $t_n \rightarrow a$, $f(t_n) \rightarrow f(a)$, 则 f 在 a 处连续.

[illegible]

Thompson 小传

[illegible][illegible]

本书可作为高等院校数学专业及相关专业教材，也可供从事数学研究的科技人员参考。

曾荣获美国数学会科尔代数奖(1964)、菲尔兹奖(1966)、沃尔夫奖(1980)、中国科学院授予的地质研究所荣誉博士学位(1981)、及美国国家科学奖。

问题 2.10

1. 设 $G = N \times H$, $N \leq K \leq G$, 求证: $K = N \times (H \cap K)$.

2. 设 $G = H \times N$, 求 G 的正规子群 K 与 $H \cap K$ 的正规子群.

3. 证明: 有限群有一个极大可解正规子群.

4. 证明: $\text{Aut}(\mathbb{Z}_8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

1. 证: 如果 K 是正规子群 $K \leq G$, 则有 $N \leq K$ 及 $H \cap K \leq H \cap G = H$.

2. 证: 有正规子群 $K \leq H$, 则 $K \leq H \times N = G$. 证: 每个因子为循环群.

3. 证: 设 G 满足极大条件, 则 G 的正规子群 $N \leq G$ 是超可解群, 证明 N 是可解的.

§ 2.9 幂零群与超可解群

本章介绍由定理 2.9.1 给出的主要概念, 一个子交换群为可解群之引.

定义 2.9.1 群的正规系列 $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$ 称为 G 的正规系列, 若对每个 i , G_i/G_{i+1} 包含在 G/G_{i+1} 的中心里.

定义 2.9.2 若群 G 有一个中心系列, 称 G 为幂零群.

交换群有正规系列, 从而交换群为幂零群.

定义 2.9.3 群 G 有一个有限的正规系列 $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$, 其中每个商群 G_i/G_{i+1} 都是循环群, 则称 G 为超可解群.

定理 2.9.1 幂零群是可解群.

证明 设 G 是幂零群, 则有正规系列 $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$ 为交换群的正规系列, 易知 G 是可解群. 有在正规系列 $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$ 中没有正规子群. 查得, 该系列中, 偶数第 i 项 G_i 为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的正规子群, 从而 G 有可能. 故 G 不是幂零群.

定理 2.9.2 有限幂零群是超可解群.

证明 设 G 为有限幂零群, $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$ 是 G 的一个正规系列. 若把该中心正规系列 G_i 作为正规子群, 则 G_i/G_{i+1} 包含在 G/G_{i+1} 的中心里. 由于包含于 G/G_{i+1} 的中心 G_i/G_{i+1} 是正规子群, 故 G_i/G_{i+1} 是 G/G_{i+1} 的正规子群, 从而 G_i/G_{i+1} 是 G/G_{i+1} 的正规子群, 从而 G 为超可解群.

定理 2.9.3 超可解群的商群是超可解群.

证明 设 G 是超可解群, 则有正规系列 $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$ 是正规系列, 其中每个 G_i

G 都是循环群,那么对于商群 $G/H, G/H, \dots$ 的对应像 H/H 组成正规群列

$$H/H/H/H/\cdots/H/H=1.$$

这里把重复的群删去后,对于相邻的 G/H 和 H/H 就一定是循环的商群 $H/H/H$, 因为循环群的对应像是循环群或单元素群. 对于子群 N , 取 $N' = N \cap H, N'' = N \cap H/H, \dots, N^{(i)} = N \cap G^{(i)}/G^{(i)}/H$. 对于 $\forall i, N^{(i)}/G^{(i)}/H$ 在 H/H 内是一致的, 而且,

$$N \cap N' = N \cap G^{(1)} \cap G/H = G^{(1)} \cap G/H = N^{(1)} \cap G/H.$$

但是 N 是 $G^{(1)}$ 的子群, 因为 N 是循环群或单元素群, 因此 $N \cap N'$ 是循环群或单元素群, 所以 N 是超可解群.

推论 2.9.4 超可解群满足极大条件.

超可解群是有限生成的, 具有根群. 以上定理, 它的子群也是有限生成的, 所以极大条件满足.

定理 2.9.5 超可解群 G 具有正规群列 $G = H_0/H_1/H_2/\cdots/H_n = 1$ 其中每个商群 H_i/H_{i+1} 是无限循环群或是素数阶循环群.

证明 设 $G = G_0 = G_1/\cdots/G_n = 1$ 是正规群列, 其中 $G_0 = G$ 是循环群, 要求 $G_0 = G$ 是有有限阶的素数 p, p, \dots, p , 其中 p, p, \dots, p 是素数, 不必都是不同的, 只有 $G_0 = 1$ 具有阶为 $1, p, p, \dots, p, \dots, p$ 的正规子群, 而且这些都是特征子群, 因此在 $G_0 = G$ 之上的、 $G_0 = G$ 的正规子群 G_1 也是正规的, 而且相邻的群的前面是素数阶循环群. 用这个方法相继每个有限阶的商群 $G_i = G_i/H_{i+1}$, 就得正规群列的正规群列, 其中每个商群是无限循环群或素数阶循环群.

这个定理还可以推广到具有按素数的大素数排列素数阶循环群.

定理 2.9.6 超可解群的导出群是幂零的.

证明 设 $G = G_0 = G_1/\cdots/G_n = 1$ 是 G 的正规群列, 其中 $G_0 = G$ 是循环群, 设 $H = G \cap G_1$, 那么 $G/H = H/H/\cdots/H/H = 1$ 是正规群列, 而且相邻的群的前面是循环群 $G/H = G/H = \cdots = G/H$, 其中 $G/H = G/H$ 是循环群. 我们来构造这些 G/H 组成 G 的中心群列.

每个 G/H 是 G 中一些正规子群的交, 所以 G/H 是正规的, 所以 $G/H = G/H = G/H$ 是循环的, 正规子群, 用 G/H 的元素作变换经循环群 $G/H = G/H$ 的自同构. 然有循环群的自同构构成 N 子群, 所以 G/H 的每个元素子集 $G/H = G/H$ 的可交换的自同构, 于是任何两个元素的换位子 $[x, y] = x^{-1}yx^{-1}y^{-1}$ 在 $G/H = G/H$ 中等于单位. 这说明 $G/H = G/H$ 的正规, 因为这些 G/H 组成 G 的中心群列, 所以 G 是幂零的.

定理 2.9.7 有限 p 群是幂零群.

证明 设 P 为有限 p 群, 对 P 作归纳法. 若 $P = p$, 则 P 为交换群, 从而幂零. 若 $P = p^2$, 令 $Z = Z(P)$, 则 $Z \neq 1$. 由归纳假设知, P/Z 有正规群列,

P 的每个非生成元必为 P 中某元的 p 次幂.

定理 2.9.10 有限交换 p -群是循环 p -群的直积.

证明 设 I 为有限交换 p -群, 对 I 用归纳法. 设 $P = pI$ 结论对 I 成立. I/P 的交换 p -群, 令 Q 是 I/P 的极大子群, 则 $I/Q \cong P$.

由归纳假设, $Q \cong Q_1 \times \cdots \times Q_r$, 其中对 $\forall i, Q_i$ 是 p -循环群. 不失一般性可设 $r = r_1 + \cdots + r_{p-1}$. 令 $x \in P$, 但 $x \notin Q$, 因为 $I/Q \cong P$, 我们有 $x \in Q$, 因而 $x = x_1 \cdots x_r$, 其 $\forall i$ 来说, $x_i \in Q$, 若对某个 i 以及某个 $i \in Q$ 有 $x_i = y_1 \cdots y_{s_i} x_i^{p^{j_i}}$, $y_1 \cdots y_{s_i} x_i^{p^{j_i}} = y_1 \cdots y_{s_i-1} y_{s_i+1} \cdots y_{s_i}$.

但 $x_i \in Q$, 由此事实可知, 存在 $x_i \in I/Q$ 使得 $x_i = x_1 \cdots x_r$, 其中 x_i 是 Q_i 的生成元, 或为单位元.

若 $x_i \neq 1$, 则 x_i 是 x_i 与 Q 的直积, 因而可设 $x_i = x_i$. 在此情况下, 存在某个 j_i 使得 $j_i \neq 1$, 令 $j(1 \leq j \leq s)$ 是使得 $y_j \neq 1$ 的最小整数.

我们知道了 y_1, \dots, y_r . 因为 P 是交换群, 对 i 为 $1, \dots, r$, 令 m_i 为最小公倍数 m_i , 且 $m_i = p^{j_i}$. 令 Q_i 是 Q 的极大子群, 因而 Q_i 有 Q_i 的直积, 则

$$Q_i \cong Q_i \times Q_i \times \cdots \times Q_i / p^{j_i}.$$

若我们能证明 $x_i \in Q_i$, 则 Q_i 就是 x_i 与 $p^{j_i} Q_i$ 的循环群的直积, 因而 Q_i 是循环群的直积. 设 $x_i = y_1 \cdots y_r$, 其中 $y_j \in Q_j$, $x_i \in Q_i$, 故仅 $y_i \in p^{j_i} Q_i$, 且 $y_i \in p^{j_i} Q_i$, 其中 $m_i = p^{j_i}$. 且 $y_i = y_1 \cdots y_r$ 且 $y_i \in p^{j_i} Q_i$, 故 $y_i = y_1 \cdots y_r$ 且 $y_i \in p^{j_i} Q_i$ 的分解式中, 第 j_i 个分量不为 1. 又由 Q_i 的作法, $(x_i) \cap Q_i = 1$, 结论得证.

定理 2.9.11 有限交换群基本定理 有限交换群是循环 p -群的直积.

证明 由定理 2.9.10, 有限交换群是 $\mathbb{Z}/p^{j_i} \mathbb{Z}$ 子群的直积. 又由定理 2.9.11, 对每个 $\mathbb{Z}/p^{j_i} \mathbb{Z}$ 子群是循环 p -群的直积. 证.

定理 2.9.12 设 G 为 p -群非交换群, $p \geq 3$. 则 G 有 4 种情况:

(1) $p \neq 2$:

$$G = \langle x, y \mid x^p = y^p = 1, x^{-1}yx = y^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p, \\ \text{或 } G = \langle x, y \mid x^p = y^p = 1, x^{-1}yx = y^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p.$$

(2) $p = 2$:

(iii) $G = \langle x, y \mid x^4 = y^4 = 1, x^{-1}yx = y^3 \rangle \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ (四面体群);

(iv) $G = \langle x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2, x^{-1}yx = y^3 \rangle$ (四元数群).

证明 我们分两种情况讨论: $p \neq 2$ 与 $p = 2$.

(1) $p \neq 2$

G 含有 p -阶元, 我们希望证明存在 p -阶元 x, y 使得 $x \in G$, 且 y 在 G

因为 $x \neq 0$, 故 $x^{-1} \neq 1$. 由此可见, G 中每个元可唯一表示为 $x^a y^b$, 其中 $1 \leq a \leq 3$, 同时不难证明, $yx = xy^2$.

由此我们可完全决定 G 的任意两个元素的运算. 因如若这样的群存在, 则在同构意义下, 它是唯一的. 从而可存在性, 考虑 S_3 中由元素 $x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 生成的子群 H .

易验证 H 是一个 6 阶非交换群且有唯一正规子群 $\langle x \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

我们已经介绍了几类重要的群:

循环群 交换群 幂零群 超可解群 可解群.

问题 2.9

1. 求证: $Z(N \times H) = Z(H) \times Z(N)$.

设 G 为有限基零群, G_1 是循环群, G_2 是幂零群.

设 G 为有限群, $G \cong S_n$, G_1 由 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in N = (H) = H$ 生成, $G_2 \cong (H) = H$.

设 G 为有限基零群, $(\forall x, y \in G)$, 只要 $(x, y) = 1$, 就有 $x = yx$.

设 G 为有限基零群, G 的子群和商群都是幂零群. 有限基零群的直积还是幂零群.

设 G 为有限群, G 是直积群的充要条件是 G 由两个 2 阶元 x 和 y 生成. 特别地, $G = \langle xy \rangle \times \langle x \rangle$.

设 G 是有限基零群, $1 \neq p_1 \neq p_2$ 是乘积等于 G 的阶的任意地排列的系数, 则 G 具有合成群列 $G_0 = G, G_1 = G_0^{p_1}, \dots, G_n = 1$, 这里 $G_i = G_{i-1}^{p_i}$ 的阶是 p_i .

§ 2.10 群的构造

群的研究可以分为两个方面. 一方面是对给定的有背景的重要群, 如各种对象为对称群、置换群、商群等; 几何、物理的群等. 有限单群、可解群与解代数方程有联系等等. 另一方面是构造群, 以及它们其他群的关于群的表示与映射. 另一方面是尽可能地构造一些新的群, 或者是借助于已知群去构造新群, 或者说是根据某要求构造新群. 常称前者为群的结构理论和表示理论, 后者为群的构造理论.

下面讨论由子群、商群, 都是从一个已知群获得新群的方法.

例如, 从一般线性群 $GL_n(F)$ 得到其子群 $SL_n(F)$, 以及从 $SL_n(F)$ 得到 $PSL_n(F)$ 等等.

由两个已知群 K 和 H , 可以构造一个新的群, 由它们的外直积 $H \times K$. 由已知的两

有限集,从而 $F(S)$ 为有限生成自由群.

设 G 同构于由群 $F(S)$ 的商群 $F/S \cong K$ (K 是 $F(S)$ 的正规子群, F/G 是由 $F(S) \cong F$ 生成的,进一步,对 K 中每个元素 a, b 中就有一个等式 $f(a) = 1$, K 有多少元素, G 中就相应的有多少个关系式,由于 F 是 K 的一个子集, K 是 $F(S)$ 中包含 F 的最小正规子群 (由 F 生成的正规子群), 则 K 上每个元素均可用 $F \setminus F(S)$ 上全部生成集合的元素运算出来,反映在群 $G = F/G$ 中, G 的所有关系均与 F 中元素给出关系推导出来.

定义 2 10.4 我们把由 F 中元素给出的那些关系全体叫做群 G 的交叉关系集,群 G 可写成 $G = \langle F | R \rangle$, $\forall a, b \in F$, 以群 G 中群的方式为群 G 的一个表现.

例如令 $S = \{a, b\}$, K 是 $F(S)$ 中的元素 a^2 和 b^2 上生成的正规子群, 如果 $G = F(S)/K$, 则 G 的结构可以写成 $G = \langle A, B | A^2 = (AB)^2 = 1 \rangle$.

例 2 10.1 $\{1, a\}$ 表示两元素集合为两集 $\{1, a\} \cong S_2$ 是以 S 为基的自由群, 因为当时 $K = \{1\}$, $G \cong F(S)/\{1\} = F(S)$.

例 2 10.2 $\langle a, b | a^n = 1, b^n = 1 \rangle = F(S)/K$, 其中 $S = \{a, b\}$, 因而 n 阶循环群可表现 $\{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$.

例 2 10.3 $\langle a, b | a^n = 1, b^n = 1, ab = ba \rangle$ 为正规群, 它有生成元 a, b , 且由 $a^n = 1, (ba)^n = 1$ 一个 F 是以 a, b 为基的自由群, 此有四组同态 $f: F \rightarrow D_n$, $f(a) = a, f(b) = b$, 由同态基本定理可知 $D_n \cong F/\text{Ker}f$.

$f: F \rightarrow D_n, f(a) = a, f(b) = b^{-1}$, $f(a) = a, f(b) = a^{-1}$, $f(a) = a^{-1}, f(b) = a^{-1}$, $K = \text{Ker}f$ 是 F 中由 $a^n, b^n, f(a)$ 生成的正规子群, 且 $K = \text{Ker}f$.

现在考虑商群 F/K , 且 A 和 B 分别表示 a, b 在 F/K 中的象, 则 $A = f(a) = f(a) = 1, F/K$ 可由 A, B 生成, 由于 $f(a)^n = 1, f(b)^n = 1, f(a) = f(b)$, F/K 中元素 a_i 表示成 $1, A, \dots, A^{n-1}, 0 \leq i < n$, 从而 $|F/K| \leq 2n$.

$$2n = |D_n| = |F/\text{Ker}f| = |F/K|/|\text{Ker}f/K| \leq 2n/|\text{Ker}f/K|$$

因此, $K = \text{Ker}f, D_n \cong F/K$, 于是 D_n 有如下的表现:

$$D_n = \langle a, b | a^n = 1, b^n = 1, ab = ba \rangle$$

例 2 10.4 $\langle a, b | a^2 = 1, b^2 = 1, ab = ba \rangle = Q$ 中每个元素均可写成 $a^i b^j$, $i = 0, 1, j = 0, 1$, 从而 $Q \cong S_4$. 我们有一个具体取商群 $G = A_4$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (i = \sqrt{-1}),$$

满足 $A^4 = 1, B^2 = A^2, BA = A^3B$.

并且可直接验证 $AB \in \langle A, B \rangle, \dots, A^3, B^2$ 为 8 个不同的矩阵, 因此 $G \cong S_4$ 然后, 按例 2.10.1 的方法得出 $G \cong Q$, 即 Q 为 8 阶非 Abelian 群.

定义 2.10.5 设 S 为任意集合, 表现为 $f = \sum_{\alpha \in S} a_{\alpha} \alpha, \forall \alpha, a_{\alpha} \in \mathbb{Z}$ 的群叫做, S 为基(或在 S 上)的自由 Abel 群.

由于元素可交换, 所以 F 中元素均可写成

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n^r \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, n \in \mathbb{Z}, \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \cdots \neq \alpha_n)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 S 中不同元素, 并且若不考虑排列次序, α 的这个表达式是唯一的, 好像定理 1.1.1 那样, 由每个子群生成 Abel 群均是有限生成, 记为 Ab 群的商群. 为了进一步看看有限生成自由 Abel 群的结构, 我们现在引进群的直积:

定义 2.10.6 设 G_1, \cdots, G_n 是群, 在集合的直积

$$(G_1, G_2, \cdots, G_n) = \{(g_1, g_2, \cdots, g_n) \mid g_i \in G_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

中定义运算

$$(g_1, \cdots, g_n)(g'_1, \cdots, g'_n) = (g_1 g'_1, \cdots, g_n g'_n),$$

易证 G 对此运算成群, 叫做群 G_1, \cdots, G_n 的直积.

它的元素为 (g_1, \cdots, g_n) , 元素 (g_1, \cdots, g_n) 的逆为 $(g_1^{-1}, \cdots, g_n^{-1})$.

设 G 和 K 是群, 且 $G = \bigcup_{k \in K} (G_k \cup \{e\})$ 有 $|K| = n, (1, k) \in k$ 是 $G \times K$ 的某个子群, 并且 $(G_1 \cup \{e\}) \cap (G_k \cup \{e\}) = \{e\}$ 中元素和 $(1, k)$ 中元素可交换, $G \times K = (G_1 \cup \{e\}, (1, K), (G_2 \cup \{e\}, (1, K), \cdots, (G_n \cup \{e\}, (1, K))$.

定理 2.10.3 设 $H, K = (G, H \cap K = \{e\}, G = HK, |H|$ 对每个 $h \in H, k \in K, hk = kh$, 则 $G \cong H \times K$.

证明 由 $G = HK$ 和 H 中元素与 K 中元素的交换性, 可知 G 中每个元素 f 可表成 $f = (h, k) \in H \times K$. 再由 $H \cap K = \{e\}$ 的, (h, k) 的这个表达式是唯一的. 于是我们可以定义 $f: G \rightarrow H \times K, (h, k) \mapsto (h, k)$.

而且知这是 $f: (h, k) \mapsto (f(h), f(k)) = (h, k) \mapsto (h, k) = f(h), f(k) = f(h, k)$, 从而 f 为同构, 即 $G \cong H \times K$.

下面定理是判别一个群为某些子群直积的方法.

设 G 由 (g_1, \cdots, g_n) 中元素 g_1, \cdots, g_n 等同 G 中元素 g , 由此将 G 看成 G 的正规子群. 类似地, (g_1, \cdots, g_n) 也自然地看成 G 的正规子群, 从而 G 的每个元素唯一地表成 $g = g_1 \cdots g_n (g_i \in G_i)$.

定理 2.10.4 设 G_1, \cdots, G_n 是 G 的正规子群, 则以下二条件是彼此等价的,
(1) $G = G_1 \cdots G_n$;

(2) G 中每个元素可以唯一表示成 $g = g_1 \cdots g_n$, 其中 $g_i \in G_i$;

(3) $G = G_1 \cdots G_n$, 且对每个 $m, 1 \leq m \leq n, (G_1 G_2 \cdots G_{m-1}) \cap G_m = \{1\}$.

证明 (1) \Rightarrow (2), 如定理前面的约定, G 中元素 $g = g_1 \cdots g_n$ 唯一地写成

$$(g_1, 1, \cdots, 1, \cdots, 1, \cdots, 1, g_n) = (g_1, \cdots, g_n)$$

1.1.10 设 $i \in \{1, \dots, G_1\} \cap G_2$, 则有 $i \in G_1$ 使得 $i = g_1 \dots g_m = g_{m+1} \dots g_n$ 是 $1, \dots, g_{m-1}g_m^{-1}$, 由(2)中唯一性假设, $g_m^{-1} = 1$, 从而 $g = g_m = 1$, 即

$$\{1, \dots, g_{m-1}\} \cap G_2 = \{1\}$$

$\{1, \dots, g_{m-1}\} \cap G_1 = \{1\}$. 由 G_1 是 G_1 的正规子群 $\langle 1, \dots, g_{m-1} \rangle$ 是 G_1 的正规子群,

现在对 m 归纳证明 $J_m = G_1 \times \dots \times G_m (2 \leq m \leq n)$.

当 $m=2$ 时, $\forall g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$,

$$g_1 g_2 g_1^{-1} = g_1 g_2 g_1^{-1} = g_2 \in G_2, \quad g_1 g_2 g_1^{-1} = g_2 \in G_2, \quad g_1 g_2 g_1^{-1} = g_2 \in G_2,$$

1.1.11 设 $J = \langle 1, \dots, g_{m-1} \rangle$. 现在设 $J = \langle 1, \dots, g_{m-1} \rangle$, 对 J, G_m 是 G_1 的正规子群, $J = \langle 1, \dots, g_{m-1} \rangle$ 假设 $J = \langle 1, \dots, g_{m-1} \rangle$, 于是由定理 1.1.10 知,

$$J = \langle 1, \dots, g_{m-1} \rangle, \quad \dots, \quad \dots$$

特别当 $m=n$ 时, $G = J_n = G_1 \times \dots \times G_n$.

现在, 在子集 J 中由 Abn 群 G 的基 $\{a_1, \dots, a_n\}$ 对 G 中每个元素表示为 $a_1^{x_1} \dots a_n^{x_n}$, 由 Abn 群 G 的子群 J , J 均是 J 的, 从定理 1.1.10 知, $J = \langle 1, \dots, g_{m-1} \rangle$ 但是 J 是无限循环群, G 同构于 n 个无限循环群的直积.

对于群 G , 把 n 个群 G_i 的直积写成 $G = \langle a_1 \rangle \times \dots \times \langle a_n \rangle$. 当 G 为 Abn 群时, G 是 G 的子群. 现在设 G 是有限个或自由 Abn 群, 则

$$G = \langle a_1 \rangle \times \dots \times \langle a_n \rangle \subseteq \mathbb{Z}^n,$$

其中 $\langle a_i \rangle$ 均是无限循环群.

对每个 $n \geq 2, G_n = \langle a_1^n \rangle \times \dots \times \langle a_n^n \rangle$,

$$\langle a_1^n \rangle \times \dots \times \langle a_n^n \rangle \subseteq \langle a_1 \rangle \times \dots \times \langle a_n \rangle \subseteq \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}^n,$$

1.1.12 此数 r 是 G 的秩, 是 G 的子群 G 本身非平凡决定的. 换句话说, 如果 $r = 0$ 且 $G = \langle 1 \rangle$, 则 G 是同构于 \mathbb{Z}^n . 由本定理 1.1.10 知, G 是同构于 $\mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}^n$, \dots , $\mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}^n$ 且 G 是同构.

定义 2.10.7 如果 $G = \mathbb{Z}^n$ 和 G' 为有限个或自由 Abn 群 G 的秩, 记为 $\text{rank}(G)$.

综合上述, 我们证明了下面的结构定理.

定理 2.10.5 有限个或自由 Abn 群 G 同构于有限个无限循环群的直积, $G = \mathbb{Z}^n$, $\text{rank}(G) \geq 1$.

两个这样的群 G 和 G' 同构 $\Leftrightarrow \text{rank}(G) = \text{rank}(G')$.

推论 2.10.6 设 $\{a_1, \dots, a_n\}$ 和 $\{b_1, \dots, b_m\}$ 是有限个或自由 Abn 群 G 的两组基, 则 $n = m$.

问题 2.10

1. 令 $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ 为 n 个元素生成, 如果 G 的子群 H 具有有限指数, 则 $1 \in H$.

$$= d_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n \in G.$$

令 $k_i = d_1 q_i + r_i$ ($0 \leq r_i < d_1$), 则

$$v = d_1 (y_1 + q_2 y_2 + \cdots + q_n y_n) + r_2 y_2 + \cdots + r_n y_n.$$

令 $v = d_1 y_1 + d_2 y_2 + \cdots + d_n y_n$, 它是 F 的基, 从而, $r_i \in S$, 由 d 的极小性知, $r_i = 0$ 或 $r_i = d$. 因此 $d \mid d_1, d \mid d_2, \dots, d \mid d_n$, 这是积为 n 的 1 个 $Abel$ 群.

我们现在证明 $G = \langle v \rangle \oplus (G \cap H) = \langle d_1 x_1 \rangle \oplus (G \cap H)$.

首先, 由 $v = d_1 y_1 + d_2 y_2 + \cdots + d_n y_n \in G$ 且 $d_1 y_1 \in G \cap H$, 其次对 F 中元素 $u = r_1 y_1 + t_2 y_2 + \cdots + t_n y_n \in G$ ($t_i \in \mathbb{Z}$).

令

$$t_1 = d_1 q_1 + r_1, 0 \leq r_1 < d_1, u = q_1 v + r_1 x_1 + t_2 y_2 + \cdots + t_n y_n \in G,$$

由 d_1 的极小性知 $r_1 = 0$, 于是

$$t_2 y_2 + \cdots + t_n y_n \in G \cap H, u = q_1 v + (t_2 y_2 + \cdots + t_n y_n) \in \langle v \rangle + (G \cap H),$$

因此 $G = \langle d_1 x_1 \rangle \oplus (G \cap H)$.

如果 $G \cap H = \{0\}$, 则 $G = \langle d_1 x_1 \rangle$, 定理成立.

如果 $G \cap H \neq \{0\}$, 则 $G \cap H$ 是积为 n_1 的 1 个 $Abel$ 群 H 的子群, 根据归纳假设存在 H 的一组基 x_2, \dots, x_n , 数 q_2, \dots, q_n 使 $r_1 = d_1 \cdots q_n + d_2 x_2 + \cdots + d_n x_n \in \langle d_1 x_1 \rangle$, 于是

$$r_1 = d_1 q_2 x_2 + \cdots + d_1 q_n x_n + d_2 x_2 + \cdots + d_n x_n.$$

令 $d_2 = qd_1 + r$, $0 \leq r < d_1$, 则 $\{x_2, x_1 + q x_2, x_3, \dots, x_n\}$ 为 F 的基, 而

$$r x_2 + d_1 (x_1 + q x_2) = d_1 x_1 + d_2 x_2 \in G.$$

则 $r \in S$, 由 d 的极小性知 $r = 0$, 即 $d_1 \mid d_2$.

定理 2.11.2 有积生成 $Abel$ 群的 $(x_1, x_2, \dots, x_n) / \langle \dots \rangle$, 其中 x_1, x_2, \dots, x_n 互素, $m_1 \leq \dots \leq m_n$ 且 $m_1 \mid m_2 \mid \dots \mid m_n$.

证明 不妨设 $x_1 = 1$, 且 x_1 是由 x_1, \dots, x_n 生成的, 于是 1 同构于积为 n 的 1 个 $Abel$ 群 F 的子群 $\langle 1 \rangle$. 如果 $n = 1$, 则 $x_1 = 1$, 从 x_1, x_2, \dots, x_n 的情形. 如果 F 的子群 $\langle x_1 \rangle \neq \{0\}$, 由定理 2.11.1 知, 存在 $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{Z}$, $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_n$, 使

$$F = \langle x_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle x_n \rangle, K = \langle d_1 x_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle d_n x_n \rangle.$$

令 $d_{n+1} = \dots = d_n = 0$, 我们有

$$G \cap F/K \cong (\langle x_1 \rangle / \langle d_1 x_1 \rangle) \oplus \cdots \oplus (\langle x_n \rangle / \langle d_n x_n \rangle)$$

$$= \langle d_1 x_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle d_n x_n \rangle / \langle d_1 x_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle d_n x_n \rangle$$

且 $0 \leq r_i < d_i$, $r_i \in S$, 由 d 的极小性知 $r_i = 0$ 或 $r_i = d_i$. 设 m_1, \dots, m_s 表示 d_1, \dots, d_s 中不为 1 的那些数, 则

$$G \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_s}, \text{ 其中 } r = n - s, \text{ 且 } m_1 \mid m_2 \mid \cdots \mid m_s.$$

设 G 是有限生成 Abel 群, L 表示 G 中有限阶元素全体. 如果 a 和 b 分别是 G 中阶数为 m 和 n 的元素, 则 a 和 b 的阶分别记为 $\text{ord}(a)$ 和 $\text{ord}(b)$ 和 a, b 的最小公倍数. 从 G/L 是 G 的子群, 叫做 G 的因子群. 易知 L 是 G 的 Sylow 子群.

定理 2.11.3 设 A 和 B 是有限生成 Abel 群.

(1) 存在 G 的有限生成子群 A_1 , 使得 $G = A_1 \oplus L$;

(2) 如果 $G = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus B_1 \oplus B_2$, 其中 A_1 和 A_2 分别为 A 和 B 的有限生成子群, 则 $A \cong B \Leftrightarrow \text{rank } A_1 = \text{rank } B_1$ 且 $A_2 \cong B_2$.

证明 (1) 根据定理 2.11.1, 存在同构 $\varphi: G/L \cong F$, 其中

$$F = Z_{m_1} \oplus \cdots \oplus Z_{m_r} \oplus Z_{m_{r+1}} \oplus \cdots \oplus Z_{m_n},$$

不惟在 $G/L \cong F$ 的因子群就是 F , 而且 G/L 就是 G 的因子群 A_1 , 记 $A_1 = \varphi^{-1}(Z)$, 则 $A_1 \cong Z$ 且 $A = A_1 \oplus A_2$.

类似 $A_1 \cong F$, 则 $A_2 \cong B_1$, 从而 $A_1 \cong A_2 \cong F \cong B_1 \cong B_2$, 于是 $\text{rank } A_1 = \text{rank } B_1$.

反之, 若 $\text{rank } A_1 = \text{rank } B_1$, 则 $A_1 \cong B_1$, 又有 $A_2 \cong B_2$, 故 $A = A_1 \oplus A_2 \cong B_1 \oplus B_2 = B$.

每个有限生成 Abel 群 G 均同构于 G/L , 其中 L 是 G 的有限阶子群, 叫做 G 的秩, 记为 $\text{rank } G$. 有限生成 Abel 群 G 的秩 $\text{rank } G$ 与 G/L 的秩 $\text{rank } G/L$ 是一致的.

定理 2.11.4 设 A 为有限 Abel 群, $A \neq \{0\}$.

(1) 存在 $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_t$, 使得 $A \cong Z_{m_1} \oplus Z_{m_2} \oplus \cdots \oplus Z_{m_t}$, t 唯一确定;

(2) 存在一组整数 $f_1, f_2, \dots, f_r, g_1, g_2, \dots, g_s$ 为素数, s_1, s_2, \dots, s_t 为整数, 使得 $A \cong Z_{f_1} \oplus \cdots \oplus Z_{f_r} \oplus Z_{g_1} \oplus \cdots \oplus Z_{g_s}$, 集合 $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ 由互不相同素数组成.

证明 有限 Abel 群 A 的因子群是有限生成子群, 由定理 2.11.3 有 $A/L \cong Z_{m_1} \oplus \cdots \oplus Z_{m_t}$, 因此 A 除 L 外均无无限阶元素, 且有限阶子群 L 的元素与有限阶子群 A/L 的元素互素, 因此

$$A \cong Z_{m_1} \oplus \cdots \oplus Z_{m_t},$$

从而得到 A 中的分解式 $A \cong m_1 \oplus \cdots \oplus m_t$, 其中 f_1, \dots, f_r 是不相同的素数, s_i 为整数, 则 $Z_{f_1} \oplus \cdots \oplus Z_{f_r} \oplus Z_{g_1} \oplus \cdots \oplus Z_{g_s}$ 为素数相当的直和环的直和, 使得 A 中的分解式 $A \cong m_1 \oplus \cdots \oplus m_t$ 满足这些条件, 且 m_1, \dots, m_t 和 f_1, \dots, f_r 的个数相等.

先证 p_1, \dots, p_r 互素性. 对于每素数 p_i , 有限阶 G 的 Sylow p_i 子群是彼此互素的, 且 G 中每个 p_i 为 p_i 方幂的元素均在 G 的 Sylow p_i 子群之中. G 为有限 Abel 群时, 每个子群均可以与其互素, 从而对互素素数 p_i, p_j , G 有唯一 Sylow p_i 子群 G_i , 并且 G_i 就是 G 中全部 p_i 方幂的元素所生成子群. 设 G_i 的素因子分解式 $G_i \cong p_1^{s_{i1}} \oplus \cdots \oplus p_r^{s_{ir}}$, 则 $G_i \cong p_1^{s_{i1}} \oplus \cdots \oplus p_r^{s_{ir}}$, 即每 p_i 有限 Abel 群是它的所有 Sylow 子群的直和.

3. 设群 G 是 24 阶群且 $C(G) = 1$. 试证 $G \cong S_4$.

令 $C = \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_r)(j_1 j_2 \dots j_s) \in S_n$, i_1, i_2, \dots, i_r 和 j_1, j_2, \dots, j_s 是 C 的互不相交子集, 则 G 的任意子群 H 都是它的子群 $H \cap G(i-1, 2, \dots, n)$ 的直积.

设 G 是由有限生成的自由群 A 生成的群, $\text{rank}(A) = r$. 如果 a_1, a_2, \dots, a_r 是 G 的一组生成元, 则 $n \geq r$.

设 $H = \langle a_i, 1 \leq i \leq n \rangle$, $H \cong \text{自由群}$. 是否存在 $K \leq H$, 使得 $K \cap H = \{1\}$, $G = K \rtimes H$?

设 G 是有限群, $|G| = n$, 其中 n 是奇数. 如果 G 中存在一个循环子群, 证明 G 中存在子群 K , 使得 $[G : K] = 2$.

§ 2.12 群对称性的应用

群论在数学、物理、化学、生物学及计数问题等方面都有广泛的应用, 下面仅就计数方面的应用介绍几个问题.

首先解决如何计算集合在群作用下的不动点数问题.

Burnside 定理 设有有限群 G 作用于一有限集 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 上, 在 G 作用下, 轨道数 (类数) 为 $|S/G| = \sum_{i=1}^r M_i$, 其中 M_i 为元素 s_i 在 S 中不动点的个数, 则 M_i 是对每一个群元素 s_i 有

1. 项链问题

设有 r 种颜色的珠子, 要做成 n 颗珠子可串成的项链, 问可做多少种不同种类和形状的项链?

这里, 说的不同种类和形状, 是指珠子可任意转动及翻转, 翻转都于其重合. 在数学上可以描述为:

设 $S = \{1, 2, \dots, m\}$ 代表 m 颗珠子的集合, 它们可排列成一条项链, 珠子与珠子相连, 与 1 相连, 我们称这样的项链为珠子 s_1, s_2, \dots, s_m 为 $1, 2, \dots, m$ 为, 每颜色为集合, 则每一个映射 $f: S \rightarrow A$ 代表一个有标号的项链. 令

$$H = \{f \in S^A : f(s_i) = s_{i+1}\}$$

为集合 A 上的有标号项链集合, 显然有 $|H| = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot n$ 是全部有标号项链的数目.

现在考虑二面体群 D_n 对集合 H 的作用. 设

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots & m \\ i_1 & \dots & i_k & \dots & i_m \end{pmatrix} \in D_n, f = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots & m \\ c_1 & \dots & c_k & \dots & c_m \end{pmatrix} \in H$$

其中 $c_i \in A$. 定义 g 对 f 的作用为

$$g(f) = \begin{pmatrix} g(1) & g(2) & \dots & g(m) \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ c_{i_1} & c_{i_2} & \dots & c_{i_m} \end{pmatrix} = f \circ \tau$$

引 12.1 设 $f \in D_n$, $f = (i_1 i_2 \cdots i_k)$, $f^2 = (i_1 i_3 \cdots i_{k-1} i_k)$, $f^3 = (i_1 i_4 \cdots i_{k-2} i_{k-1} i_k)$,
 所以 $g(g_2(f)) = g_2(g(f))$.

其意义是, 设 $f \in D_n$ 的作用就是对珠子做点旋转或翻转变换, 从而有 $g \in D_n$ 使 $g(f) = (i_1 i_3 \cdots i_{k-1} i_k)$ 是 f 平方后的 f^2 , f 属于同一轨道.

类似, 任一类型的置换 f 的轨道, 不同类型的轨道数就是 H 在 D_n 作用下的轨道数目, 可用 Burnside 定理求解.

卜一个轨道, 即是 $\{f \in D_n \mid f \text{ 与 } g \text{ 同轨}\}$ 在 H 下的不动点数 $M(g)$, 这与 g 的当换类型有关, 设 g 是一个 $1^r, \cdots, m^s$ 个置换, 它的轮换分解式可表示为:

$$g = (\bullet) \cdots (\bullet) (\bullet \bullet) \cdots (\bullet \bullet) \cdots,$$

其中有 r 个 \bullet , 有 s 个 $\bullet \bullet$, \cdots 可以证明, $g(f) = f$ 当且仅当 f 式中 \bullet 轮换中, 珠子有相同的颜色.

现在来计算 $M(g) = |\{f \in D_n \mid g(f) = f\}|$.

满足 $g(f) = f$ 的 f , 对 \bullet 与 $\bullet \bullet$ 轮换珠子上的颜色必须相同, 从而对 \bullet 轮换中的珠子颜色有 r 种选择, 对 $\bullet \bullet$ 轮换有 s 种选择, \cdots , 所以满足条件 $g(f) = f$ 的 f 有 n 种选择, 故 $M(g) = n^r \cdots n^s$, 将它代入 Burnside 公式, 就得到项链的种类数为:

$$N = 1/|D_n| \sum n^{r+s+\cdots+t} (g \text{ 为 } 1^r, 2^s, \cdots, m^t \text{ 型})$$

上中式是对 D_n 中每一个置换求和, 式 (12.1) 可表示为:

$$N = 1/|D_n| \sum c(r+s+\cdots+t) n^{r+s+\cdots+t}$$

其中, $c(r+s+\cdots+t)$ 为 D_n 中置换的数目, c 为 $r+s+\cdots+t$ 的项链的种类数.

例 2.12.1 用 3 种颜色做珠子, 做珠子串项链, 可做多少种.

解 由分析, 按类型计算 D_n 中置换元素的不定系数, $m = 3, D_n = H$.

1 型置换有 1 个, 1^3 元素的不定系数为 $M(1) = 3^3$.

2 型置换有一个, 每一个元素的不定系数为 $M(2) = 3^2$.

3 型置换有 4 个, 每一个元素的不动点数为 $M(3) = 3^1$.

6 型置换有 2 个, 每一个元素的不动点数为 $M(6) = 3$.

所以, $N = 1/12 (3^3 + 3 \times 3^2 + 4 \times 3^1 + 2 \times 3) = 92$.

上式可直接代入公式 (12.1), $D_n = \sum c(r+s+\cdots+t) n^{r+s+\cdots+t}$ 求得.

例 2.12.2 用 3 颗珠子, 颗珠子做成项链, 可做多少种不同的项链.

解 这个问题与例 2.12.1 类似, 只是珠子有 3 颗, 不可用同样的方法来分析. 设 S 是珠子有 3 颗的由 3 颗珠子组成的珠子集合, 不难计算 $|S| = 3^3 = 27$, 群 D_3 作用在集合 S 上, 不同的轨道数目就是上式求出的项链的种类数.

力计算 D 中每一个元素在集合 Y 上的不动点数, 列表 2.4.

表 2.4

| 群元素类型 | 同一类群元素个数 | $M(g)$ | $\sum M(g)$ |
|-------------|----------|--------|-------------|
| 1^8 型 | 1 | 84 | 84 |
| $1^2 2^3$ 型 | 9 | 4 | 36 |
| 3^2 型 | 2 | 3 | 6 |
| 9^1 型 | 6 | 0 | 0 |
| Σ | 18 | 126 | |

所以 $N=126/18=7$. 这 7 种不同的项链如图 2.4 所示.

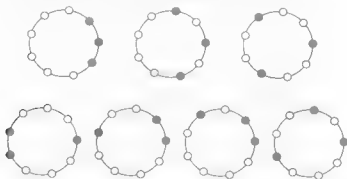


图 2.4

在上面的计算过程中, 关键是计算每一种元素的不动点数, 例如对 $1^2 2^3$ 型元素, 它的不动点共有 3 个, 如图 2.5 所示.



图 2.5

2. 开关线路的计数问题

具有两种状态的电子元件称为开关, 通常的开关或联动开关组成一个开关的状态由一个开关变量来表示, 由若干个开关 $1, 2, \dots, n$ 组成的

表 2.6 S_3 作用在 Π 上的不动点数

| 群元素 $\lambda \in S_3$ | 不动点个数 | 不动点个数之和 |
|-----------------------|-------|-------------------|
| 1° 型 | 1 | 256 |
| 1°2° 型 | 3 | 192 |
| 3° 型 | 2 | 32 |
| $ G = 6$ | | $\sum X(g) = 480$ |

$|n|_{\lambda} = |G| \sum_{\lambda \in S_n} \lambda(n) = 6 \times 80 = 480$, 共有 80 条无线路

3. 图的计数问题

首先给出两个图同构的概念:

设 $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ 为两个图, 若存在双射

$$\sigma: V_1 \rightarrow V_2 \text{ 满足 } (v_i, v_j) \in E_1 \Leftrightarrow (\sigma(v_i), \sigma(v_j)) \in E_2,$$

则称 G_1 与 G_2 同构.

直接看出, 两个同构的图除顶点有标号外, 相同. 下面讨论如何计算不同构的图的数目. 为此, 我们要进一步描述此问题.

设 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 为 n 个点的集合, $Y = \{\{i, j\} | i, j \in V, i \neq j\}$

是 V 的二元子集的集合, $A = \{0, 1\}$, 则每一个映射

$$g: Y \rightarrow A,$$

对应一个图 $G = (V, E)$, 其中 $E = \{\{v_i, v_j\} \in Y | g(\{v_i, v_j\}) = 1\}$

全部 Y 到 A 的映射的集合 $\Pi = \{g | g: Y \rightarrow A\} = A^Y$.

我们用 Π 同时表示 n 个点上的全部图的集合, 则

$$\Pi = \{G = (V, E) | G \text{ 是 } n \text{ 个点的图}\}.$$

Π 中的图的点都是有标号的.

考虑不同构的图的数目, 又, 我们称 Π 的自作用为

$$\forall \sigma \in S_n, \forall G = (V, E) \in \Pi, \sigma \text{ 对 } G \text{ 的作用为 } \sigma(G) = (V, \sigma(E)),$$

其中 $\sigma(E) = \{\{\sigma(v_i), \sigma(v_j)\} | \{v_i, v_j\} \in E\}$. 容易看出, 两个同构的图, 它们在 Π 中自作用, 得到不同构图的数量, 就是 Π 的自作用. Burnside 定理求得 Π 中的无标号图的数量. 我们系 Π 中的不动点, 我们用 Burnside 定理求 Π 的方法.

例 2.12.4 求 4 个点的不同构的图的个数.

解 设 $\Pi = \{G = (V, E) | G \text{ 是 } 4 \text{ 个点的图}\}$, 考虑 S_4 对 Π 的自作用, 计算 Π 中每一个元素的不动点的数目. 对元素 $\sigma \in S_4$, Π 中的不动点 $G = (V, E)$ 满足 $\sigma(E) = E$. 若 $\sigma = (12)$, 若 G 是不动点, 则 $\sigma(E) = E$ 的映射 $\{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$ 有 4 个限制 $\{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$, $\{1, 3\} \rightarrow \{1, 3\}$, $\{1, 4\} \rightarrow \{1, 4\}$, $\{2, 3\} \rightarrow \{2, 3\}$, $\{2, 4\} \rightarrow \{2, 4\}$, $\{3, 4\} \rightarrow \{3, 4\}$.

$\sigma = (1, 1), (2, 2), \dots$, 对集合 Y 中的元素可自由选择函数值的 n 数为 1, 即为 $\{(1, 2), \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\}$.

所以 $M(\sigma) = 2^4$.

对 σ 中 n 元素, 例如 $\sigma = (1, 1), (2, 2), \dots$, 若 σ 满足 $\sigma^2 = (1, 1), (2, 2), \dots$, 故 σ 中 n 元素的像可自由选择的 n 数 n 为 n , 故 $M(\sigma) = 2^n$.

对 σ 中 n 元素, 例如 $\sigma = (1, 2), (3, 3), \dots$, 若 σ 满足 $\sigma^2 = (1, 1), (2, 2), \dots$, 故 $M(\sigma) = 2^{n-1}$.

对 σ 中 n 元素, 例如 $\sigma = (1, 2), (3, 4), \dots$, 若 σ 满足 $\sigma^2 = (1, 1), (2, 2), \dots$, 故 $M(\sigma) = 2^{n-2}$.

由 Burnside 定理得:

$$N = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} M(\sigma) = \frac{1}{n!} (2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + 2^0) = \frac{2^n - 1}{n}.$$

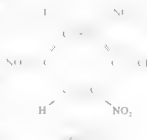
4. 分子结构的计数问题

若在某环上结合 H 或 Cl (H 或 NO_2), 可构成多少种不同的化合物?

这个问题可从两种情况来考虑. 第一种情况, 若未把某环中各连接键有作为是当口的, 则分子结构, 也成是一种情况. 第二种情况, 若把分子中各连接键, 也

第一种情况, 若未把某环上的连接键有作为不同, 则键与双键交替时 (见图 2.7), 则需另外考虑.

例 2.12.5 设某环上碳原子之间是由单键与双键交替连接而, 在某 n 个碳原子间结合 H 或 Cl (H 或 NO_2), 则可构成多少种不同的物质? 其中有一种化合物为图 2.7 所示的 TNT 的分子结构)?



解 这个问题, 可因是位不同, 故在于: 旋转和 G , 由于两个分子中各键, 已存在双键与单键, 且键重合, 双键与双键重合, 故

$$G = \{(1), (1, 3, 5)(2, 4, 6), (1, 5, 3)(2, 6, 4), (1, 2)(3, 6)(4, 5), (1, 4)(2, 3)(5, 6), (1, 6)(2, 5)(3, 4)\} \cong D_6.$$

全部有标号的分子数为 $|G|$ 倍, 所有标号的分子结构的不说个数, 计算如表 2.7 所示.

表 2.7

| 群元素类型 | 同一类群元素个数 | $M(g)$ | $\sum M(g)$ |
|----------|----------|--------|-----------------|
| 1^6 型 | 1 | 3^6 | 3^6 |
| 3^2 型 | 2 | 3^3 | 2×3^3 |
| 2^3 型 | 3 | 3^3 | 3^4 |
| Σ | 6 | | $3^2 \times 92$ |

所以 $N = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 8$, 故共可形成 18 种不同的物质, 此数比把各键看作等同时要大, 因为不对称性增加了.

5. 正多面体着色问题

用 n 种颜色对正 n 多面体的顶点着色, 用 n 种着色去经过对正多面体进行着色, 如果通过一旋转能互相重合, 则认为这两种着色法本质上是相同的. 问本质不同的着色法有多少种?

例 2-12-6 用 n 种颜色对正六面体的顶点着色, 问有多少种不同的着色方法?

解 我们类似于求解问题 5 的方法先建立正六面体着色问题的数学模型, 设

$X = \{1, 2, \dots, 8\}$ 为正六面体的顶点集合,

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 为 n 种颜色的集合.

则每一个映射 $f: X \rightarrow A$ 对应顶点的一个着色方法, 令

$$Y = \{f \mid f: X \rightarrow A\} = A^X,$$

为全体着色方法的集合, 可得 $|Y| = |A|^{|X|} = n^8$ 为正六面体顶点的全部着色法数目.

但是在这些着色法中, 有些着色法可通过正六面体的一个旋转使它们重合, 即这些着色法本质上是相同的, 那么本质不同的着色法的数目是多少呢? 这就涉及正六面体的旋转群 G 对集合 Y 的作用问题.

在六面体的旋转群上, 共有 1 型置换 1 个, 2 型置换 9 个, 3 型置换 8 个, 4 型置换 6 个, 5 型置换 3 个, 6 型置换 6 个. 计算不动点数, 或直接代入公式即得.

$$N = 1 \times 1 + 9 \times (n^4 + n^2 + 8n + 1) + 8 \times (n^4 - 1)n + 6n^3 + 3 \times n^2 + 6n$$

第3章 群表示论

群表示理论是群论的核心内容之一,是代数表示论的一个重要分支.它对群论本身以及对物理、化学等其他学科都有着广泛的应用.

非平凡的表示理论大致分为群表示、 l -群表示论、 l -模表示论.前者在有限群的发展中起了很大作用,后者对于有限单群分类问题的解决提供了有力的工具.本章将有限群的表示与有限单代数的表示放在一起来讨论,侧重有限单群表示理论及其应用.

关于对称群论的应用,物理或工程系统许多最重要性质均依赖于系统的对称性,相应的对称性往往可以用不可约对称群来描述.因此,研究一些与这些对称群同构的一般线性群或群代数(所谓表示代数),从代数上建立与这些对称群的结构便于分析.知道相应对称群的子群,从而获得对称分解时,多对称性一般化规律的认识.

§ 3.1 结合代数

我们将希望既有环结构又有 n 个 $n \times n$ 矩阵的代数系统.环代数,简称代数,首先介绍代数的有关概念及例子.一个 F - n 基本环 A :

定义 3.1.1 域 F 上 n -量, $n \geq 1$, F - n 基本环 A 是 F -代数,或 F -代数,简称代数,由在 A 中规定一个乘法运算满足下列条件:

- 1) 对 $\forall a, b, c \in A, a(b+c) = ab+ac, (b+c)a = ba+ca$;
- 2) 对 $\forall k \in F, a, b \in A, (ka)b = k(ab) = a(kb)$.

定义 3.1.2 n -代数 A 称为有限单代数,若 A 由 F - n 量生成且有单性,即 $\dim_F A = n$,则称 A 为 n 次代数.

定义 3.1.3 n -代数 A 称为交换代数,若代数 A 满足交换律,即对于 $\forall a, b \in A, ab = ba$.

定义 3.1.4 n -代数 A 称为结合代数,若代数 A 满足结合律,即对 $\forall a, b, c \in A, a(bc) = (ab)c$. F 上 n -量按照定义,一个结合代数 A 满足 F - n 量且量纲又是 n 的,即是某种“结合律”.

定义 3.1.5 A 称为 Lie 代数, 若代数 A 的乘法适合条件: 对于 $\forall a, b, c \in 1, \dots, 0$, $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$.

定义 3.1.6 A 称为 1-闭 Lie 代数, 若代数 A 的乘法适合条件: 对于 $\forall a, b, c \in 1, \dots, 0$, $ba, (a^2b)a = a^2(ba)$.

定义 3.1.7 A 称为交错代数, 若代数 A 的乘法适合条件: 对于 $\forall a, b \in 1, \dots, 0$, $ab = (aa)b, a(bb) = (ab)b$.

从代数与物理的许多应用的角度来说, 1-闭 Lie 代数中最重要的有又严格成立的正交合代数、结合合代数以及最严格且最重要的超代数, 同时也有线性变换作用成的代数, 此外还有乘法理想子代数, 二次型代数, 二次型代数, 对易代数, 交错代数, 结合代数, 等等. 代数分类是代数理论中的一个重要问题, 对于物理学家来说, 代数分类理论中的起有重要作用的代数, 我们这里只涉及超代数.

一个代数与物理学家在研究物理问题时, 代数的问题是一个域上的问题, 因此, 代数比物理有更多的限制, 下面我们就看一个有限维结合代数.

设 A 是一个有限维代数, A 作为向量空间, 设 e_1, \dots, e_n 是 A 的一个基, a 是 A 中任意元素 a 都可唯一表示为

$$a = \sum_{i=1}^n a_i e_i, \quad a_i \in F, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{且 } A = \sum_{i=1}^n F e_i,$$

反之, 任一 $a \in A$ 可用乘法表示一个向量, 故代数 A 的乘法运算, 可见 A 是结合代数当且仅当基元之间的乘法运算满足结合律. 令

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^n \delta_{ij}^{(k)} a_k, \quad \delta_{ij}^{(k)} \in F,$$

因为

$$a_i (a_j a_k) = \sum_{l=1}^n \delta_{jk}^{(l)} a_i a_l = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{\mu=1}^n \delta_{il}^{(\mu)} \delta_{jk}^{(\mu)} \right) a_\mu,$$

$$(a_i a_j) a_k = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{l'=1}^n \delta_{ij}^{(l')} \delta_{l'k}^{(l)} \right) a_l,$$

于是

$$\sum_{l=1}^n \delta_{ij}^{(l')} \delta_{l'k}^{(l)} = \sum_{l=1}^n \delta_{jk}^{(l')} \delta_{il}^{(l')},$$

其中 $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$.

在 F 上向量空间有基 e_i , 其中任意 e_i, e_j 的乘积 $e_i e_j = \sum_{k=1}^n \delta_{ij}^{(k)} e_k$ 的乘积由 $\delta_{ij}^{(k)}$

$\sum_{i=1}^n r_i h_i u_i$ 来规定, 并且 δ^{-1} 又适合上式, 易证 δ^{-1} 是 F 上代数

由以上讨论可知, 域 F 上有限维代数 A 的构造由 F 中适合上式的 n 个元 α_i 中确定, α_i 称为 A 的构造元素. 一个已知域的代数如何确定, 是代数的主要问题之一, 对某些特殊类型的代数, 这个问题已完全解决.

定义 3.1.8 一个代数 D 称为可除代数, 如果 D 的非零元对乘法构成一个群. 按此定义, 域 F 的扩张是 F 上的可除代数. 实数域、复数域和四元数除环分别是实数域上的 1 次、2 次及 4 次可除代数.

有趣的是, 这个代数就是实数域上所有可能的有限可除代数, 这就是下面著名的 Frobenius 定理.

定理 3.1.1 D 是实数域上的可除代数 $\Rightarrow D$ 是实数域、复数域和四元数除环.

证明 设 R 是实数域, D 是 R 上的 n 次可除代数.

若 $n=1$, 则 $D=R$, 即 D 是实数域.

若 $n=2$, 则 D 中有不为实数的数 α , α 是 R 上的代数元. 因为 R 上不可约多项式的次数是 1 或 2, 有 $\alpha \in R$, 故在 R 上 x^2+x+1 是个不可约多项式, 故 α 满足. 设这个不可约多项式是 x^2+px+q , 因为 α 没有实根, 故判别式 $\Delta=p^2-4q<0$, 故 $p^2<4q$. 且 α 为实数, 于是 D 中元 α 满足 $(\alpha^2+px+q)^2=0$, 即 α 满足不可约多项式 $x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+(2pq+q^2)x+q^2=0$, 于是 $R(\alpha)$ 是 R 的 2 次扩张.

若 $n=4$, 则 $D \cong R(\alpha)$, 因为 $R(\alpha)$ 与复数域 C 同构, 故 D 是复数域.

若 $n>2$, 首先我们证明四元数除环包含在 D 中. 因为 $n>2$, 同上面一样, D 含有 $R(\alpha)$ 外的元素 j_0 , 于是 $j_0^2=-1$.

下面计算 ij 及 ji , 因为 D 中任意元是 R 上二次多项式的零点, 当然, $j_0^2=-1$, j_0 也是. 于是我们有

$$(a+bx_0+cj_0+dj_0^2)^2=0, \quad (a+bx_0+cj_0+dj_0^2)(a+bx_0+cj_0+dj_0^2)=0$$

其中 $a, b, c, d \in R$, 将上面两式相加得

$$-4=(a+c)x_0+(a-c)j_0+(b+d)$$

因为 $j_0 \notin R(\alpha)$, 故 x_0, j_0 在 R 上线性无关, 因此 $a+c=0, a-c=0$, 也即 $a=c=0$. 故 $j_0+j_0x_0=2j_0, j_0=(b+d)/2$.

我们求四元数除环中的 j , 令 $j'=j_0+tx_0$, 则

$$ij'+j'i-(j_0+tx_0)+(j_0+tx_0)i=ij_0+j_0i-2t=0,$$

$$(j')^2=-1+t(ij_0+j_0i)-t^2=-1+t^2$$

必为负数, 即 $j' \notin R(\alpha)$. 查若 j 是实数, 则 \dots, j 就线性相关, 与假设矛盾.

令 $j(j')^2=-s^2, s \in R$, 则 $j=(1/s)j'$,

此时我们说代数 A 和代数 B 同态, 记为 $A \sim B$.

$\text{Ker} f = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ 称为 f 的同态核.

若 f 既是满射又是单射, 称代数 A 和代数 $f(A)$ 同构, 记为 $A \cong f(A)$.

由以上, 我们看到, 线性代数的构造思想中, 存在一些有限维代数.

另一方面, 矩阵的内、外直和概念, 使我们想到, 一些代数 A_1, \dots, A_n 的直和, 可以构造出新的代数. 也可以把一个代数 A 分解成几个代数的和.

定义 3.1.13 设 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ 是有限维代数, 令

$$A = \{a_1, \dots, a_n, a_i \in A, 1 \leq i \leq n\}$$

规定 $a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, \dots, a_1, \dots, a_n$ 满足 $a_i^2 = a_i, 1 \leq i \leq n$ 定义其运算为

$$k\{a_1, \dots, a_n\} = \{ka_1, \dots, ka_n\}$$

$$\{a_1, \dots, a_n\} + \{b_1, \dots, b_n\} = \{a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n\}$$

$$\{a_1, \dots, a_n\} \{b_1, \dots, b_n\} = \{a_1 b_1, \dots, a_n b_n\}$$

则可验证 A 为 F 上有限维代数.

取 $n = 1, \dots, \sum_{i=1}^n m_i = 1$, 称代数 A 为代数 A_1, \dots, A_n 的直和.

定义 3.1.14 设 A 是一个有限维代数, A_1, \dots, A_n 是 A 的子代数, 令 i_1, \dots, i_n 是 A 中 A_1 的理想, 且 $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ 的直和, 则称代数 A 是子代数 $A_i (1 \leq i \leq n)$ 的内直和.

无论 A 是哪种直和, 都把 A 记为

$$\Sigma \oplus A_i = A_1 \oplus \dots \oplus A_n.$$

定义 3.1.15 对 A 一个代数, 我们称 A 为可除代数 B , 是指存在 A 的加法、乘法和数乘, 使得 A 中任何非零元素 a 有左逆元 a^{-1} 和右逆元 a^{-1} , 即 $a^{-1}a = 1$ 和 $aa^{-1} = 1$. 若 A 中任何非零元素 a 有左逆元 a^{-1} 和右逆元 a^{-1} , 则称 A 为可除代数. 特别地, 若 A 中任何非零元素 a 有左逆元 a^{-1} 和右逆元 a^{-1} , 则称 A 为可除代数. 特别地, 若 A 中任何非零元素 a 有左逆元 a^{-1} 和右逆元 a^{-1} , 则称 A 为可除代数.

2) 若 B 是可除代数, 则 B^* 也是可除代数.

若 A 是若干子代数的直和, 则 A 也是可除代数的直和.

定义 3.1.16 一个代数 A 称为单代数, 如果它的理想只有零理想和自身. 显然, 可除代数一定是单代数.

下面我们给出几个有限维单代数的例子.

例 3.1.1 设 A 是一个有限维代数, M 是一个 n 阶矩阵, M 的乘法运算 \circ 映射在 A 中, 它的加法运算有数乘, 映射在 A 中. 定义 A 上乘法运算 \circ 为 M 是一个 F 代数称为 M 的直和代数. 特别地, 若 A 是域, M 是 F 上的 n 维向量空间, 则 End

受了复数(复数名称也是由 Gauss 推广而来,他还推广了用 i 来表示 $\sqrt{-1}$),他证明了 \mathbb{Z} 是唯一分解整环(Gauss 还培养了许多著名的数学家,如黎曼(Riemann)、库默尔(戴德金)、艾森斯坦因(Eisenstein)等)。

问题 3.1

1. 证明关于代数的同态基本定理,第一同构定理。

2. 设 A, \dots, I 是域 F 上代数 A 的理想,求以下列条件是等价的。

$$(1) A = \sum_{i=1}^n \oplus A_i;$$

$$(2) A \text{ 为 } F \text{ 上的向量空间, } A = \sum_{i=1}^n A_i, \dim A = \sum_{i=1}^n \dim A_i;$$

(3) A 中元素可唯一表成 A_i 中元素的和;

(4) 存在同态映射 π 到 A 上的同态映射 φ 满足 $\varphi(a) = \varphi(a) \cdot 1 \neq \varphi(1)$, 其中 1 是 A 的恒等自同构。

代数 A 的子代数 B 称为 A 的直和因子,若存在 A 的子代数 C 使得 $A = B \oplus C$, 而且 C 也是 A 的直和因子,是 F 上理想 I 与 $I \cap A$ 的理想。

1. 设 A 是域 F 上代数,对于 $a \in A$,令 $R_a: x \mapsto ax, x \in A$ 证明

(1) R_a 是向量空间 A 的一个线性变换;

(2) $a \mapsto R_a: A \rightarrow \text{Hom}(A, A)$, 则 A 关于线性变换的运算是 F 代数;

(3) $\varphi: a \mapsto R_a, a \in A$, 是代数 A 到代数 $\text{Hom}(A, A)$ 的同构映射,因而有一个代数可看作 A 的自同态代数的子代数。

§ 3.2 有限维代数

这一节我们讨论在有限群表示论中占有极其重要地位的另一个有限维代数的例子——群代数。

定义 3.2.1 设 G 为群, F 是域,令 $FG = \sum_{g \in G} k_g g \in F$, 规定

$$\sum_{g \in G} k_g g \cdot \sum_{h \in G} l_h h = \sum_{g, h \in G} (k_g l_h) (gh),$$

$$\sum_{g \in G} k_g (g^{-1}) = \sum_{g \in G} k_g (g^{-1}),$$

$$\sum_{g \in G} k_g g = \sum_{g \in G} k_g g^{-1},$$

$$a \cdot \sum_{g \in G} k_g g = \sum_{g \in G} \lambda k_g (g), a \in F$$

则 FG 按上述运算作成代数,称为 F 上的群代数

F 的单位元 1 就是 FG 的单位元 1_G , 1 元素是 FG 的一个基,因而若 G 为有限群,

则 FG 是有限维的且 $\dim(FG) = |G|$.

若把群代数 $F[G]$ 看作一个环, 则 $F[G]$ 模 M 也可看作一个 F -向量空间. 对 $f \in F, m_1, m_2 \in M, \alpha, \beta \in M$ 关于这个运算以及它的加法运算就构成向量空间. 当 M 为有限群时, 我们有下述引理.

引理 3.2.1 设 F 是域, G 是有限群, 则 $F[G]$ 模 M 是有限生成的当且仅当 M 作为 F -向量空间是有限维的.

证明 设 M 作为 $F[G]$ 模是有限生成的, 则 M 的生成元集为 m_1, \dots, m_r . 向量空间 M 由 $\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_r m_r, \alpha_i \in F$ 生成, 因为 $F[G]$ 有限, 故 M 有限.

反之是显然的.

下面我们给出群代数 $F[G]$ 模与线性表示 (V, ρ) 的基本联系.

我们学习了群在集合上的作用, 现在介绍群在向量空间上的作用.

定义 3.2.2 设 F 是一个域, G 是一个群, V 是一个 F -向量空间, $\rho: G \rightarrow GL(V)$, 我们说 G 在 V 上的作用是线性的, 如果下列条件成立:

1) 对 $\forall g \in G, v, u \in V$ 都有 $\rho(g)(u+v) = \rho(g)u + \rho(g)v$;

2) 对 $\forall g \in G, a \in F, v \in V$ 都有 $\rho(g)(av) = a(\rho(g)v)$;

由第 1 章命题 1 在集合 X 上的群 G 到 $GL(X)$ 上的群 ρ 到对称群 S_X 内的一个同态, 对 ρ 群 G 在向量空间 V 上的线性变换. 我们有了下述引理.

定理 3.2.2 群 G 在向量空间 V 上的线性变换组成的集合与群 G 到 $GL(V)$ 上的同态组成的集合之间有一个 1-1 对应.

证明 设 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 是一个同态, 定义 $\rho(g)(v) = \rho(g)v$, 也容易验证这是 G 在 V 上的一个线性变换.

反之, 若给定 G 在 V 上的一个线性变换, 我们可定义一个同态

$$f: G \rightarrow GL(V),$$

其中 $f(g)(v) = \rho(g)v, g \in G, v \in V$.

可以验证上述过程是互逆的, 这样就完成了证明.

上命题中的同态

$$f: G \rightarrow GL(V)$$

称为 G 在 V 中的一个线性表示. 由上命题可知, 群的线性表示的研究等价于群的线性变换的研究, 这里群的群一般限于有限群, 向量空间一般限于有限维向量空间. 但的线性表示这个研究领域起源于一世纪之前, 且至今, 证明对有限群的研究有许多应用.

引理 3.2.3 设 F 是域, G 是有限群, 则在 F 上有有限生成 $F[G]$ 模组成的集合与 G 在有限维向量空间上的线性变换组成的集合之间有一个 1-1 对应.

代数知道,存在 U 的一个 F 子空间 W 使 $U=V\oplus W$.

令 $\pi:U\rightarrow V$ 是 U 在 V 沿 W 的投影,即若 $u=\alpha+\beta$, 其中 $\alpha\in V, \beta\in W, \alpha\in W$, 且 $\pi(u)=\alpha$, 故 π 是使得 $\pi(u)=\alpha, \beta\in W, u=\alpha+\beta$ 的唯一的线性变换. 对于 $u\in U$, 再定义 U 到 U 的线性变换 π' 为

$$\pi'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} g\pi(g^{-1}u).$$

因为 $V\subseteq U$ 的 F 子空间, 且 π 对于 $\alpha\in V, \beta\in W$ 我们有 $\pi(\alpha+\beta)=\alpha$. 由此可见 π 把 U 映射到 V , 又因为 π 在 V 上是恒等映射, 即对 $\forall \alpha\in V, \pi(\alpha)=\alpha$. 我们有 $\pi\pi(u)=\pi(u)$, 从而 π 在 V 上的限制是恒等的, 即 $\pi|_V=1_{\text{Hom}(V,V)}$, 由线性代数知 $V=\text{Ker } \pi'$.

下面我们证明 $\text{Ker } \pi' \subseteq U$ 的 F 子空间. 为证 π' 是 U 的投影, 即 $\pi'^2=\pi'$. 证明对 $\forall x\in G, u\in U, \pi'(xu)=x\pi'(u)$. 首先我们有

$$\begin{aligned} \pi'(xu) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} g\pi(g^{-1}xu) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} g\pi(xg^{-1}u) \\ &= \frac{1}{|G|} x \left(\sum_{g\in G} x^{-1}g\pi(g^{-1}xu) \right) \end{aligned}$$

于是, 我们可证 $\pi'(xu)=x\pi'(u)$ 成立. 其次, 我们可证 $\pi'^2=\pi'$, 从而 π' 为投影. 于是我们有

$$\pi'(xu) = x \left(\frac{1}{|G|} \sum_{y\in G} y\pi(y^{-1}xu) \right) = x\pi'(u).$$

定理 3.2.4 设 U 为域 F 上 F 的 n 维单 G 模, π 为 F 的模 U 的 F 投影.

证明 设 U 为 F 的模, 对 $\forall u\in U$, 得 $u\pi(u)$ 是单模, 且 $\dim U=1$ 的情况已证.

设 $\dim U > 1$, U 不是单模, 且 $U \subseteq U$ 的 F 子空间 V 且 $V \neq U$. 由 $\text{Ker } \pi$ 是 V , 存在 U 的 F 子空间 W 使得 $U=V\oplus W$. 又 $U=V\oplus W$ 且 $\text{Ker } \pi=V$, 故 W 是 U 的 F 子空间. 假设 V 和 W 是单模的, 从而 U 是单模的.

Hamilton 小传

爱尔兰数学家 W.K. Hamilton 是爱尔兰数学家、物理学家, 1805 年 8 月 4 日出生, 爱尔兰的都柏林. Hamilton 在数学领域, 对于非欧几何和哈密顿力学, 做出了重要贡献. 1827 年进入都柏林三一学院, 1831 年以优异的成绩进入牛津大学, 便被任命为邓布拉文大学台长及都柏林三一学院数学教授, 并获皇家大英学会称号. 1837 年成为爱尔兰科学院院士, 1837—1845 年任院长.

Hamilton 在数学上的主要成就是发现四元数和推广了复变函数及微分方程的理

论四元数是复数的自然推广，四元数中的“ i, k ”的平方都是-1，利用它们，三维和四维中的旋转可以进行代数化的处理。最重要的是，四元数关于乘法运算是不交换的！这是当时发现的第一个不满足交换性的环。

Hamilton后来回忆了这段历史：“在冥思苦想之后，智慧的火花某人突然在他的头脑中迸发。那是1843年11月17日，星期四。当Hamilton沿着皇家运河步向云爱尔兰和子高的路时，他的头脑中因四元数写下了下面一串基本公式

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

这包含了他11年来所考虑的问题的全部解。他迅速地把这记录在随身携带的笔记本中，并在路过运河边的一座小桥上，并且把公式刻在了桥边的石头上。

克萊因 M. Klein 后来评论说“四元数（复数）对数学具有不可估量的重要性”。以 Hamilton 名字命名的术语有 Hamilton 四元数（代表了物理系统中的总能量，哈密尔顿-雅可比方程为量子力学线性代数中的冯·诺依曼方程等），而向量、标量、张量等术语的使用也归功于 Hamilton。

Hamilton 于 1843 年 11 月 2 日在都柏林附近与坎普克夫人分手前口占一诗云：

问题 3.2

- 设 F 和 V 是 FG -模，则 $F \rightarrow V, f \mapsto f \cdot 1$ 是可移的 FG -模。
- 设 F 是域 G 的有限群，证明：
 - $\Sigma_{g \in G} g \in FG$ ，则 F 是 FG 中满足正规性的唯一的子空间。
 - $FG/FG \rightarrow F$ 是 FG -模的同态，且对于 $g \in G, f \in F, g \neq 1$ ，则 $fg \neq f$ 是 FG 的使得 $FG/\text{Ker}f$ 同构于平凡模的唯一的子模。
 - 设 $h \in f \cap C_G$ ，则 $F \cap \text{Ker}f = 0$ 。由此得 $\text{Ker}f$ 不是 FG 的直和因子，因此 FG 不是半单模。

§ 3.3 半单代数的对称性

本节涉及有限代数环所有单位元的有限维 F -代数，其中 F 是一个域。代数上的模均指有限生成模，模的直和也假设是有限的。

定义 3.3.1 代数 A 是半单的，如果 A 上的非零 A -模是半单的。

如果 G 是有有限群 G ，则在半单 FG 上，使得代数 FG 是半单的。

下面我们介绍半单代数的某些基本事实。首先，我们来决定在什么条件下，一个模块是半单的。

引理 3.3.1 对于一个 A -模 M 来说，下列条件是等价的。

(1) M 的任何子模是 M 的直和因子;

(2) M 是半单模;

(3) M 是一些单子模的和.

证明 (1) >1 , 与推论 3.3.1 类似, 由 (3) >1 , 由定义直接可得.

(2) >1 . 假设 (1) 成立, N 是 M 的一个子模. 令 $V = \max\{W \mid M = W \oplus N\}$, 且 W 是 M 的子模. 我们希望证明 $N+V=M$.

设 $N \cap V \neq M$, 如果 M 的每一个子模均在 $N \cap V$ 中, 由 (3) 知, $M = N \cap V$, 矛盾. 因而必有 M 的一个单子模 S 不含在 $N \cap V$ 中. 因为 $S \cap (N \cap V)$ 是单子模 S 的子模, 故 $S \cap (N \cap V) = 0$, 当然 $S \cap V = 0$, 于是我们有 $V \cap V = S$, 令 $n \in N \cap V = S$, 则存在 $v \in V$, $sv = n$ 使得 $n \in V$. 由此得 $n \in N \cap V = S$, 从而 $n \in S$, 也即 $n \in S$, 因为 $N \cap V = 0$, 所以 $n = 0$. 由此得 $N \cap V = S = 0$, 这与 V 的极大性假设矛盾. 因而我们有 $M = N \cap V$. 又因为 $N \cap V = 0$, 故 M 是 N 与 V 的直和, 即 N 是 M 的直和因子. 这就得证 (1) 成立.

引理 3.3.2 单子模的子模和商模也是半单模.

证明 设 M 是一个半单模, 且 N 是 M 的一个子模, M 的每个子模都同构于 M 的某个商模, 于是只要证明 M 的每个商模是半单模即可. 令 M/N 是一个商模, $f: M \rightarrow M/N$ 是一个自然模同态, 因为 M 是半单的, 故 M 是一些单子模的直和. 不妨设 $M = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$, 于是 $M/N = f(M) = f(S_1) \oplus f(S_2) \oplus \cdots \oplus f(S_n)$. 由模同态基本定理, $f(S_i)$ 同构于 S_i 的某个商模, 而 S_i 是单模, 故 $f(S_i) = 0$ 或 $f(S_i) = S_i$ 是单模, 因而 M/N 是单子模的直和. 由引理 3.3.1 可知, M/N 是半单模.

引理 3.3.3 代数 A 是半单的当且仅当 A 模 A 是半单的.

证明 设 A 模 A 是半单的, M 是由 m_1, \cdots, m_r 组成的 A 模. 令 f 表示 r 个 A 模 A 的直和, 定义

$$f: (a_1, \cdots, a_r) \mapsto a_1 m_1 + \cdots + a_r m_r,$$

则 f 是 A^r 到 M 的一个 A 模同态且为满同态.

于是 M 同构于 A 模 A 的一个商模. 由引理 3.3.2 知 M 是半单的, 从而 A 是半单代数. 反之, 由定义直接可得.

定理 3.3.4 设 A 是一个半单代数, A 作为 A 模, 可设

$$A \cong S_1 \oplus \cdots \oplus S_r,$$

其中 S_i 是 A 的位子模, $r \geq 1$, 且任何 r 个单子模同构于某个 S_i .

证明 设 S 是一个单子模, 固定某个 i , $1 \leq i \leq r$, 令 $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$, 其中 $\varphi_i \in S$, 则 φ 是 A 到 S 的一个 A 模同态, 因为 S 是单模, 故 φ 是满射. 对每个 i 来说, 令 $\varphi_i \in S \rightarrow S$ 是 φ 在 S 上的限制, 若对所有的 i 来说, $\varphi_i = 0$, 则必有 $\varphi = 0$. 这与 $\varphi \neq 0$ 相矛盾, 故必存在某个

由 Frobenius 定理知, $\varphi(U')$ 的每个合成因子已同构于 S .

首先我们证明 $\varphi(U' \cap U) \neq 0$. 设 $\varphi(U' \cap U)$ 不包含在 U' 中, 在自然映射下, $\varphi(U'$ 在 U' 中的像是一个非零子模, 且有 S 作为它的一个合成因子. 另一方面, 由题设可知, $U' \cap U$ 的合成因子恰好是那些 S , 其中 $i \neq j$, 因此 $U' \cap U$ 的子模不可能有 S 作为其合成因子. 这就得出 $\varphi(U' \cap U) = 0$. 令 φ 是 φ 在 U' 上取型, 则 $\varphi \in \text{End}(U')$ 作 $\text{Hom}(U')$ 到 $\text{Hom}(U_1) \oplus \cdots \oplus \text{End}_A(U')$ 的映射

$$T: \varphi \mapsto (\varphi_1, \dots, \varphi_r).$$

则易证 T 是 A 模单同态.

而且 T 是满射. 设 $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in \text{Hom}(U_1) \oplus \cdots \oplus \text{Hom}(U_r)$, 任取 $x \in U$, 则 $x = x_1 + \cdots + x_r$, 其中 $x_i \in U_i$.

令 $\varphi(x) = \varphi_1(x_1) + \cdots + \varphi_r(x_r)$, 则易验证 $\varphi \in \text{Hom}(U' \cap U) = T^{-1}T(\varphi)$, 故 T 是满射.

引理 3.3.13 若 S 是一个单 A 模, 则对任意的 $r \in \mathbb{N}$, 都有

$$\text{End}_A(nS) \cong M_r(\text{End}_A(S)).$$

证明 把 nS 的 r 个分量为 S 中元的 n 维列向量 $\phi \mapsto (\varphi_i) \in M(r, \text{End}_A(S))$, 定义 nS 到 nS 的映射 $T(\phi)$,

$$\begin{aligned} s_1 & \mapsto [\phi_{11} \ \cdots \ \phi_{1n}] \quad s_1 \in S, \quad \phi_{11}(s_1) + \cdots + \phi_{1n}(s_n) \\ T(\phi) & \vdots = \vdots \quad \vdots \vdots \vdots = \vdots \\ s_n & \mapsto [\phi_{n1} \ \cdots \ \phi_{nn}] \quad s_n \in S, \quad \phi_{n1}(s_1) + \cdots + \phi_{nn}(s_n) \end{aligned}$$

因为对每个 $\varphi_i \in \text{Hom}(S, S)$, 容易验证 $\forall x \in S, i \in \{1, \dots, r\}$, 都有

$$T(\phi)(as+ts) = a[T(\phi)(s)] + T(\phi)(t),$$

因而 $T(\phi) \in \text{End}_A(nS)$. 可以验证以上定义的

$$T: M_r(\text{End}_A(S)) \rightarrow \text{End}_A(nS)$$

是一个代数单同态. 只需证 T 是满射即可.

令 $\psi \in \text{End}_A(nS)$, 对 $\forall 1 \leq i, j \leq n$, 定义 S 到 S 的映射

$$\begin{aligned} s & \mapsto [\phi_{11}(s)] \quad (0) \mapsto [\phi_{1n}(s)] \\ \psi_i: \psi & \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ \phi_{21}(s) \\ \vdots \end{vmatrix}, \dots, \psi & \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ \phi_{2n}(s) \\ \vdots \end{vmatrix} \\ (0) & \mapsto [\phi_{n1}(s)] \quad (s) \mapsto [\phi_{nn}(s)] \end{aligned}$$

容易验证对 $\forall \varphi_i \in \text{Hom}(S, S)$, 令 $\Psi = (\varphi_i)$, 则 $\Psi \in M_r(\text{End}(S))$, 且 $T(\Psi) = \psi$. 这就证明了 T 是满射.

如未 S 是一个单 A 模, 由 Schur 引理直接可得 $\text{Hom}(S, S)$ 是一个可交换代数. 进一步地, 代数闭域 F 的代数 $\text{End}(V)$ 有更具体的结构

引理 3.3.14 设 F 是代数闭域, S 是一个单 A -模, 则 $\text{End}_A(S) \cong F$.

证明 设 $\varphi \in \text{End}_A(S)$, 把 φ 看作有限维 F -向量空间 S 上的 F -线性变换. 因为 F 是代数闭域, φ 在 F 中有一个非零特征根 λ , 这 $\lambda I \in \text{End}_A(S)$ 的相等元, 则 $\varphi - \lambda I \in \text{End}_A(S)$ 有非零的核, 因而不是可逆的. 因为 F 是代数闭域, 这就迫使 $\varphi - \lambda I$ 可以验证, $\varphi \mapsto \lambda I$ 是 $\text{End}_A(S)$ 到 F 的一个同构映射.

引理 3.3.15 设 B 是一个代数, 则对 $\forall \varphi \in N$, 都有 $M_n(B)^{\varphi} \cong M_n(B)^{\psi}$.

证明 设 $X = (x_{ij}) \in M_n(B)^{\varphi}$, $\psi \in N$, $\psi(X) = X$, 其中 X' 为矩阵 X 的转置, 容易看出 ψ 是 $M_n(B)^{\varphi}$ 到 $M_n(B)^{\psi}$ 的一一对应.

任取 $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}) \in M_n(B)^{\varphi}$, 则对 $\forall i, j$, 我们有

$$\begin{aligned} (\psi(X)\psi(Y))_{ij} &= \sum_k \psi(X)_{ik} \psi(Y)_{kj} = \sum_k X'_{ki} Y'_{kj} \\ &= \sum_k x_{ki} y_{kj} = \sum_k y_{jk} x_{ki} = (YX)_{jk} \\ &= (YX)'_{ij} = (XY)'_{ji} = \psi(XY)_{ji}, \end{aligned}$$

这表明

$$\psi(XY) = \psi(X)\psi(Y).$$

由此可知 ψ 是一个代数同态.

为了以上的准备工作, 现在我们可以给出单代数的结构定理.

定理 3.3.16 代数 A 是单当且仅当同构于单代数上矩阵代数的直和.

证明 设 A 是单代数, 则 $1 = I_1 + \cdots + I_r$, 其中 I_i 是 n_i 个单 A -模 S_i 的直和, 当 $i \neq j$ 时, S_i 与 S_j 不同构.

我们有

$$\begin{aligned} A &\cong \text{End}_A(A) \cong \text{End}_A(I_1 + \cdots + I_r) \\ &\cong \text{End}_A(n_1 S_1 + \cdots + \text{End}_A(n_r S_r) \\ &\cong M_{n_1}(\text{End}_A(S_1)) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\text{End}_A(S_r)), \end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} A &\cong [M_{n_1}(\text{End}_A(S_1)) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\text{End}_A(S_r))]^{\varphi} \\ &\cong M_{n_1}(\text{End}_A(S_1))^{\varphi} \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\text{End}_A(S_r))^{\varphi} \\ &\cong M_{n_1}(\text{End}_A(S_1))^{\varphi\psi} \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\text{End}_A(S_r))^{\varphi\psi}. \end{aligned}$$

因为 A 个单模的直和是单代数, 可除代数的反代数也是可除代数, 由此得知, 任意一个单代数同构于可除代数上矩阵代数的直和.

反之, 由定理 3.3.10 可得:

定理 3.3.17 代数 A 是单代数 $\Leftrightarrow A$ 同构于某个可除代数上的矩阵代数.

证明 设 A 是单代数, 由引理 3.3.1 知, A 是半单的, 再由定理 3.1.1 得 A 同构于可除 F 代数上有限矩阵代数的直和. 但由定理 3.1.1 知, A 恰有一个理想, 又 A 是单代数, 故 A 恰有一个理想, 故我们有一个. 因而任何单代数同构于某个可除代数上的矩阵代数. 由定理 3.3.8 得出定理的另一面.

代数闭域上的半单代数有更简明的结构.

定理 3.3.18 设 A 是代数闭域 F 上的 n 阶半单代数, 则 A 同构于 F 上的幂等代数的直和.

问题 3.3

1. 设 $n \in \mathbb{N}$, 令 $\mathcal{M}_n(F)$ 是 $n \times n$ 阶矩阵组成的代数, A 是 $\mathcal{M}_n(F)$ 中非空子集, 集合 $\{A^k \mid A \in \mathcal{M}_n(F), k \in \mathbb{N}\}$ 是否有限? 即问: 是否存在 $A \in \mathcal{M}_n(F)$ 使得 $\{A^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 是无限集合? 已知有唯一的合成列, 证明: 一个单 F 上模作用 A 是 $\mathcal{M}_n(F)$ 模子集 $\mathcal{M}_n(F)$ 上的核, 反之亦然.

2. $\mathcal{M}_n(F)$ 是 F 上模 A 的 n 阶模, 即 $\mathcal{M}_n(F)$ 模 F 同构于 A , F 的右 n 个 A 模的直和.

3. 设 F 是代数闭域, $\mathcal{M}_n(F)$ 是 $n \times n$ 阶矩阵组成的代数, $\mathcal{M}_n(F)$ 是 F 上非空子集, 集合 $\{A^k \mid A \in \mathcal{M}_n(F), k \in \mathbb{N}\}$ 是否有限? 即问: 是否存在 $A \in \mathcal{M}_n(F)$ 使得 $\{A^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 是无限集合? 已知有唯一的合成列, 证明: 一个单 F 上模作用 A 是 $\mathcal{M}_n(F)$ 模子集 $\mathcal{M}_n(F)$ 模, 反之亦然.

4. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_n(F)$ 都有 $\dim \mathcal{M}_n(F) = n^2$, $\mathcal{M}_n(F)$ 是 F 上模.

5. 证明: A 是单 A 模当且仅当 A 是可除代数.

6. 设 A 是一个有限维 F 代数, 则 A 是单代数当且仅当 A 是单代数, 如果 A 是一个单代数且 A 是单代数, 则 A 同构于某个可除代数上的矩阵代数.

Jordan 小传

若尔当 M. J. C. Jordan (1838—1919) 法国数学家, 1838 年 12 月 22 日出生于里昂 (Lyon), 以第一名考进巴黎大学, 1856 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1859 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1861 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1863 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1865 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1867 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1869 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1871 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1873 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1875 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1877 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1879 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1881 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1883 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1885 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1887 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1889 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1891 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1893 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1895 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1897 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1899 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1901 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1903 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1905 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1907 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1909 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1911 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1913 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1915 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1917 年 10 月 1 日进入巴黎大学, 1919 年 10 月 1 日进入巴黎大学.

若尔当在代数、几何、概率论以及数学基础方面都有重要贡献, 以他的名字命名的概念有: 若尔当分解定理、若尔当标准型、若尔当中值定理、若尔当不等式、若尔当不等式 (O. L. Holder) 定理和若尔当代数等.

Jordan 在 1872 年发表的《置换与代数》(Théorie des permutations et des systèmes algébriques) 一书, 是代数理论的经典著作, 其中首次将由伽罗瓦创建的多元多项式的根分解理论, 以伽罗瓦理论, 进行了清晰和完整的论证, 特别研究了线性变换群、可解群及其在代数和几何上的应用. 在这本书中, Jordan 还首

令

$$ax = (v_1, \dots, v_n) T_{v_n} \vdots$$

因为 φ 是 V 到 $M_n(F)$ 的一个代数同态, 直接验证可知下列等式成立:

$$\begin{aligned} a(x+y) &= ax+ay, a(kx) = (ak)x = k(ax), \\ (a+b)x &= ax+bx, (ab)x = a(bx), \end{aligned}$$

其中 $a, b \in A, x, y \in V, k \in F$.

这说明 V 上通过 φ 可定义为向量空间 V 的一个线性变换, 即存在 $V \rightarrow V$ 的映射满足上述性质, 这启发我们引出下列重要概念.

定义 3.4.3 设 A 是域 F 上有限维结合代数, V 是域 F 上有限维向量空间, 我们说 V 是代数 A 的代数模, 或代数 A 的表示空间, 若存在一个 $A \rightarrow V$ 的映射 $(a, v) \mapsto av$ 满足下列性质:

- (1) 对 $\forall v \in V$ 有 $1v = v$;
- (2) 对 $\forall a \in A, u, v \in V$ 有 $a(u+v) = au+av$;
- (3) 对 $\forall a, b \in A, v \in V$ 有 $(a+b)v = av+bv$;
- (4) 对 $\forall a, b \in A, v \in V$ 有 $a(bv) = (ab)v$;
- (5) 对 $\forall a \in A, k \in F, v \in V$ 有 $a(kv) = (ak)v = k(av)$.

代数 A 的两个代数模 V 和 V' 称为同构, 记作 $V \cong V'$, 如果有 V 到 V' 的一个双射 $\varphi: V \rightarrow V'$, 使得对 $\forall v_1, v_2, v \in V, a \in A, k \in F$ 都有

$$\varphi(av) = a\varphi(v), \quad \varphi(kv) = k\varphi(v).$$

相应地可定义代数模的概念、子模、商模等概念. 相应的同态基本定理, 第一、第二同构定理对于代数模也是成立的.

下面我们讨论代数的表示与代数模之间的关系. 上面的讨论说明代数 A 的一个表示可定义代数 A 的一个代数模. 反过来, 给定代数 A 的代数模 V , 也可以按如下方法得到代数 A 的一个表示.

任取 V 在 F 上的一个基 τ_1, \dots, τ_n , 对 $\forall a \in A$, 我们有 $a\tau_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \tau_j \in V$.

令 $I = (a_{ij})$, 则易验证 $\varphi: a \mapsto I$ 是 A 到 $M_n(F)$ 的一个代数同态, 即 φ 是代数 A 的一个表示.

定理 3.4.1 代数 A 的两个表示等价, 它们对应的代数模同构.

证明 设 φ, φ' 是代数 A 的两个互相等价的矩阵表示, 而 V, V' 分别为 φ, φ' 对应的代数模. 首先证明必要性, 即存在域 F 上 一个 n 阶可逆矩阵 S 使得

$$\varphi'(a) = S(\varphi(a))S^{-1}, \quad a \in A.$$

根据以上讨论,表示 φ 所对应的代数模 V 的数乘运算定义为

$$a| \vdots | = (v_{i1}, \dots, v_{in})\varphi_i(a), i=1, 2, \dots, n.$$

其中, v_{i1}, \dots, v_{in} 是向量空间 V 的基, $1, \dots, n$ 为表示 φ, φ 的相同的级数.

$$\begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_{n1} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix}$$

则 ψ 是向量空间 V 的同一同构对应, 向量 $\psi^{-1}(a)$ 也是代数模 V 的同一同构对应, 即等价表示对应的代数模是同构的.

下面具有充分性, 设 V 与 V' 是同构的, ψ 是任何同构映射所对应的矩阵, v_{i1}, \dots, v_{in} 是 $V, (i=1, 2)$ 的基, 则

$$\{v_{i1}, \dots, v_{in}\} = \{v_{i1}, \dots, v_{in}\}\psi$$

是代数模 V_2 的一个基, 对于 $a \in A, \varphi_i(a) \in M_n(F)$ 有

$$\begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} | \vdots | = (v_{11}, \dots, v_{1n})\varphi_1(a),$$

则可验证

$$\begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} | \vdots | = (v_{11}, \dots, v_{1n})\psi^{-1}\varphi_1(a)\psi$$

于是 $\psi\varphi_1(a)\psi^{-1} \in M_n(F)$.

以上等代数知识可知, 同一线性变换在不同基下的矩阵是相似的, 所以存在可逆矩阵 P , 使得 $v_{i1}, \dots, v_{in}\psi^{-1} = P\varphi_i(a)P^{-1}$, 即说 P, P^{-1} 与 φ_i 和 ψ^{-1} 是等价的.

定义 3.4.4 域 F 上代数 A 的一个表示 φ 称为忠实的, 若 $\varphi: A \rightarrow \text{End}(V)$ 或 $\varphi: A \rightarrow M_n(F)$ 是一个代数单同态.

代数 A 的代数模 V 称为忠实的, 若对任意的 $a \in A, a \neq 1, aV \neq 0$, 必有 $aV = V$.

由定义易知, 忠实代数模 V 决定的表示 φ 是忠实的, 而忠表示所对应的代数模也是忠实的.

代数 A 本身可看作代数 A 的代数模, 这 A 上 A 是域 F 上同量空间, 而数乘 a 就规定为 A 的乘法运算, 可知 A 是 A 的代数模.

定义 3.4.5 A 称为代数 A 的正则代数模, A 所决定的表示称为代数 A 的正则表示.

取向量空间 V 关于子空间 V_1 的商空间 V/V_1 , 其元素为: $a+V_1$, 规定乘法运算 $av=av, \forall v, a \in A$.

直接验证可知 V 关于这个运算是 A 代数模, 称为代数模 V 关于 V_1 的代数商模. 取代数商模 V/V_1 的 F 基 $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$, 则

$$\begin{aligned} a v_1 &= v_1 \\ &\vdots \\ \bar{v}_n &= [a v_n] = v_n \end{aligned} = T_{11}.$$

即商模 V/V_1 是与表示 φ_1 相对应的代数模.

总之, 若 φ_1 表示 φ 相对 V_1 的代数模 V_1 , φ_2 对表示 φ 对应的表示 φ_2 分别对应于 V 的代数子模 V_1 与商模 V/V_1 .

代数表示论的基本问题之一是决定代数 A 在域 F 上的所有不等价的不约当表示, 这等价于决定所有互不相同的不约当模. 一般来说, 多元结合代数 A 的表示问题, 表示 A 上所有有限维代数模的代数区域上的非代数问题. 定理 3.1.3 已知 A 时, 它是已完全解决.

问题 3.4

1. 多元数阶环作为多元域上的代数, 给出 A 代数关于基 $1, \dots, x_1, \dots, x_n$ 的表示可约吗?

给出全部代数关于基 $1, x_1, x_2, \dots, x_n$ 表示 φ 的表示 φ_1, φ_2 .

§ 3.5 群表示初步

1. 群的表示

若群 G 与 (V, ρ) 为群 G 的表示, 且群 G 为群 (G, ρ) 的线性表示 $\rho, \dots, \forall g_i \in G (i=1, 2, \dots, m)$, 有映射

$$\rho(g_1), \rho(g_2), \dots, \rho(g_m) \in F^{m \times m}, \quad F^{m \times m} \rightarrow F^{m \times m}.$$

若 ρ 是保积乘法的, $\forall g_i, g_j \in G, \rho(g_i g_j) = \rho(g_i) \rho(g_j)$. 当 ρ 映射为可逆时, 映射为同构的, 称表示 ρ 为 G 的, $\rho(g_i) \in F^{m \times m}$ 时, 映射为同构的, 称表示 ρ 为 G 的, 若表示 ρ 为 G 的, 此时表示只能反映群的内积结构, 或许能反映 G 同态核 N 的商群 G/N 的群结构.

2. 表示的基

上面定义的表示, 实际上是群元在某 m 基下的表示, 离开基组, 表示无从谈

起,基矢组所张成的线性空间,称为表示空间.考察群元如何作用于表示空间中的矢量,可从两种观点分析.

(1)主动观点:群元只对矢量投影进行变换,不影响基矢.设 $\forall X \in G$,为 n 维表示空间,则利用一组正交归一基矢组 b_1, \dots, b_n 对其展开: $X = \sum_i X_i b_i$,在群元 g 的作用下,有

$$x \xrightarrow{g} x' = g x = g \left(\sum_i x_i b_i \right) = \sum_i b_i \cdot g x_i,$$

矢量分量 x_i 变化的方式为

$$x_i \rightarrow x'_i = x_i \cdot (b_i, g b_1, \dots, g b_n) = \sum_{j=1}^n (b_i, g b_j) x_j = \sum_{j=1}^n P_{ij}(g) x_j,$$

其中 $P_{ij}(g) = (b_i, g b_j)$ 为表示的矩阵元,符号 \cdot 表示内积,并且在此算式中到正交归一关系: $(b_i, b_j) = \delta_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$.

将上式写成矩阵形式,简记为 $b' = b \Gamma(g)$.

(2)被动观点:群元只对基矢作用,不影响矢量.此时基矢组 b_1, \dots, b_n 在群元 g 作用下,有 $b_i \rightarrow b'_i = b_i \cdot (b_i, g b_1, \dots, g b_n)$ (投影算符 $P_i = (b_i, g b_1, \dots, g b_n)$ 等基矢),

$$\sum_{j=1}^n P_j x = E X \Rightarrow \sum_{j=1}^n P_j = E \text{ (完备性条件)},$$

将此式作用上式两边,得到 $b' = b$ 中 n 个方程, b'_i

$$E b' = b' = \sum_i b_i (b_i, g b_j) \equiv \sum_i b_i \Gamma(g)_{ji}.$$

写成矩阵形式:

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) \xrightarrow{g} (b'_1, \dots, b'_n) = (b_1, \dots, b_n) \begin{vmatrix} \Gamma(g)_{11} & \dots & \Gamma(g)_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma(g)_{n1} & \dots & \Gamma(g)_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b' = b \Gamma(g)$.

但是无论按主动观点,还是被动观点,在群元 g 的作用下,其物理结果 b' 是相同的.试看下面例子.

例 3.5.1 设 $G_n = E$,讨论矢量 x 在 g 作用下的变化 $x \rightarrow x' (x = \sum_i x_i b_i, x'_i = \sum_j x_j \Gamma(g)_{ji} = \sum_j \Gamma(g)_{ji} x_j)$;被动: $\sum_i x_i (b_i, g b_j) = \sum_i x_i \Gamma(g)_{ji}$.显然两者结果相同.

例 3.5.2 设 $I = \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ 为量子力学角动量投影算符, 其本征函数为

$$I = \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_m = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} (L_z \Psi - m \Psi_m).$$

讨论系统绕 z 轴转动 α 角, 则球坐标 φ 经变换

$$\varphi \xrightarrow{R_z} \varphi' = \varphi + \alpha, \quad \varphi \xrightarrow{R_z^{-1}} \varphi' = \varphi - \alpha.$$

引入标量函数的变换算符 P_R , 表示在坐标变换下,

$$x \rightarrow x' = Rx, x = R^{-1}x',$$

相应地, 函数形式变化为 $P_R \Psi(x) = \Psi'(x)$,

对于标量函数应有 $\Psi'(x') = \Psi(x)$, 故

$$P_R \Psi(x') = \Psi'(x') = \Psi(x) = \Psi(R^{-1}x'),$$

故, 上述坐标变换或记为 $(P_R \Psi)(x) = \Psi(R^{-1}x)$, 对于本例,

$$P_R \Psi_m(\varphi) = \varphi_m(R^{-1}\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im(\varphi-\alpha)} = e^{-im\alpha} \Psi_m(\varphi),$$

即 P_R 的作用等价于乘以因子 $e^{-im\alpha}$, 亦即 I 相当于算符 $\exp(-iI\alpha/\hbar)$.

容易证明, 算符 P_R 与集合 $\{x_i\}, \{I_i\}$ 构成一个群, 且与坐标变换 R 构成群 G 同构, 此时集合 $\{P_R\}$ 称为群 G 的线性实现.

例 3.5.3 量子力学上线性变换算符与变换规律. 设有线性算符

$$\Psi_B(x) = L(x)\Psi_A(x),$$

在坐标变换下, $x \rightarrow x' = Rx, x = R^{-1}x'$, 波函数发生变化,

$$\Psi_A(x) \rightarrow \Psi'_A(x') = P_R \Psi_A(x'),$$

$$\Psi_B(x) \rightarrow \Psi'_B(x') = P_R \Psi_B(x').$$

但此时,

$$(x) \xrightarrow{R} L'(x'), \quad \Psi'_B(x') = L'(x')\Psi'_A(x'),$$

即

$$P_R \Psi_B(x') = P_R [L(x')\Psi_A(x')] = L'(x')P_R \Psi_A(x').$$

由于 Ψ_A 的任意性和 x' 的任意性, 因而有

$$L'(x) = P_R L(x) P_R^{-1}.$$

注意, 量子力学中物理量用厄米算符 I 表示, 我们已证明, 如果 II 只是对称变换, 则 P_R 对应守恒量, 且 II, P_R 满足 $[II, P_R] = 0$, 式中 II 为系统的哈密尔顿量.

3. 表示的特征标

特征标即为表示矩阵的对角元之和, 即

令 $\omega = \exp \frac{2\pi i}{p}$, 此处 i 为虚数单位, 令 $\Gamma = \langle \omega \rangle$, 则 $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$, 其中整数 $p \neq 2$, $n = 1$.

显然,

$$\Gamma(a^m) = (\Gamma(a))^m = (\omega^p)^m = \lambda^m (\lambda = \omega^p) (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

构成群 C_p 的一维表示 $\{\lambda^m\}$.

当 $\lambda \neq 1$ 时, 群 $\Gamma = \langle \omega \rangle$ 的表示 $\{\lambda^m\}$ 互不相同. 当 $\lambda = 1$ 时, 群表示 $\{\lambda^m\}$ 都是普通的数, 等价表示必然相等. 由于 λ 有 n 种选择, 故此群有 n 个互不等价的一维表示 (即给出 n 个不同 λ 值).

例 3.5.5 正四面体 T 为二阶自群 $\langle a, b \rangle$ 的半直积, 其中 a 为 3 阶循环群 $\langle a \rangle$ 的生成元, b 为 2 阶循环群 $\langle b \rangle$ 的生成元, 再令 $\langle a \rangle$ 轴固定 b 旋转, 则 $\langle a \rangle$ 轴固定 b 旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 角互不构成集合.

$$D_n = \{I, a, a^2, \dots, a^{n-1}, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}.$$

容易验证, D_n 构成 n 阶群, 称为 n 阶二面体群. 当 $n=3$ 时, 有

$$a^3 = b^2 = I, aba = b.$$



一维表示

$$\Gamma^{(1)}(a) = \Gamma^{(1)}(b) = \text{纯数},$$

$$\Gamma^{(1)}(a) = I, \Gamma^{(1)}(b) = I, \Gamma^{(1)}(b) = -1,$$

$$\Gamma^{(1)}(aba) = \Gamma^{(1)}(b).$$

由此

$$[\Gamma^{(1)}(a)]^n = [\Gamma^{(1)}(b)]^2 = 1, \quad \Gamma^{(1)}(a)\Gamma^{(1)}(b) = 1,$$

即

$$\Gamma^{(1)}(b) = \pm 1, \quad (\Gamma(a))^n = 1, \quad (\Gamma(a))^2 = 1.$$

当 n 为偶数时, 有四种可能的选择:

$$\Gamma^{(1)}(a) = \Gamma^{(1)}(b) = 1; \quad \Gamma^{(1)}(a) = \Gamma^{(1)}(b) = -1,$$

$$\Gamma^{(1)}(a) = 1, \Gamma^{(1)}(b) = -1; \quad \Gamma^{(1)}(a) = -1, \Gamma^{(1)}(b) = 1,$$

它们都是等价的, 就是平凡表示.

当 n 为奇数时, 有两种可能:

$$\Gamma^{(1)}(a) = \Gamma^{(1)}(b) = 1; \quad \Gamma^{(1)}(a) = \Gamma^{(1)}(b) = -1.$$

二维表示

引入符号 λ 与 ω , 意义同上例, 则可定义表示,

$$\Gamma^{(\lambda)}(a) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \Gamma^{(\omega)}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma^{(\omega)}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于 ρ 值在范围 $\rho = \frac{n-1}{2}$ 内的表示, 与在范围 $\rho = n - \frac{n-1}{2}$ 内的表示等价, 我们得到 $[(n-1)/2]$ 个不等价的二维表示.

群的表示可以分为不同的等价类. 首先我们将等价表示中结构最简单、便于讨论的表示找出来.

4. 可约表示

从线性变换的观点看, 若表示空间 L 中存在一个由 $L_1 (m < n)$ 在群 G 的作用下是封闭的, 即 $\forall x \in L_1, \forall g \in G$, 有 $gx \in L_1$, 则 L_1 称为 L 的不变子空间.

在线性代数中已经证明, 通过适当的线性变换 (相似变换), 表示矩阵总可以变为如下三角形式 (下三角):

$$\Gamma(g_*) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g_*) & 0 \\ X(g_*) & D^{(n)}(g_*) \end{pmatrix}$$

则该表示 Γ 称为可约的. 容易证明 $D^{(1)}, \dots, D^{(n-m)}$ 分别与群 G 的 $(n-m)$ 维和 m 维表示.

设 $g_*, g_\beta \in G$, 且 $g_* g_\beta = g_\gamma \in G$, 则有

$$\Gamma(g_\gamma) = \Gamma(g_* g_\beta) = \Gamma(g_*) \Gamma(g_\beta) \quad \begin{pmatrix} D^{(1)}(g_*) & 0 \\ X(g_*) & D^{(n)}(g_*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{(1)}(g_\beta) & 0 \\ Y(g_\beta) & D^{(m)}(g_\beta) \end{pmatrix}$$

其中

$$D^{(1)}(g_\gamma) = D^{(1)}(g_*) D^{(1)}(g_\beta),$$

$$D^{(2)}(g_\gamma) = D^{(2)}(g_*) D^{(2)}(g_\beta),$$

$$X(g_\gamma) = X(g_*) D^{(1)}(g_\beta) + D^{(2)}(g_*) Y(g_\beta).$$

若令 $\forall x \in L_n, \forall g_* \in G$,

$$\begin{pmatrix} D^{(1)}(g_*) & 0 \\ X(g_*) & D^{(2)}(g_*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g_*) & 0 \\ X(g_*) x_1 + D^{(2)}(g_*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

可见, 存在 $(n-m)$ 分量 x_1 在表示空间 $L = (n-m)$ 维是不变子空间, 即表示空间存在不变子空间 (除本身外). 不变子空间与相表示的可约性与否充要条件.

对于许多群, 至少是对有限群, 形如三角形的可约表示矩阵可以通过等价变换最简变为对角方块矩阵, 即对 $\forall g_* \in G$, 有

$$\Gamma(g_s) \rightarrow \Gamma'(g_s) = X^{-1} \Gamma(g_s) X \quad (\det X \neq 0)$$

则此表示称为完全可约的, 此时矩阵 $\Gamma^{(a)}(g_s), \Gamma^{(b)}(g_s), \dots, \Gamma^{(c)}(g_s)$ 所在的空间 $L_a(m$ 维), $L_b(m_b$ 维), $\dots, L_c(m_c$ 维) 均为不变子空间, 且

$$m_a + m_b + \dots + m_c = n,$$

且 L_a, L_b, \dots, L_c 分别为向量 ϵ 的分量, ϵ 的分量分别为 m_a, m_b, \dots, m_c 维, 也就是说,

$$L = L_a \oplus L_b \oplus \dots \oplus L_c = L,$$

表示空间可表为它们的直和, 或表示矩阵 $\Gamma(g_s)$ 可以表示为如下直和形式,

$$(\forall g_s \in G); \Gamma(g_s) = \Gamma^{(a)}(g_s) \oplus \Gamma^{(b)}(g_s) \oplus \dots \oplus \Gamma^{(c)}(g_s),$$

其中 $\{\Gamma^{(a)}(g_s)\}, \{\Gamma^{(b)}(g_s)\}, \dots, \{\Gamma^{(c)}(g_s)\}$ 均为群 G 的表示.

若 $\Gamma^{(a)}(g_s), \dots$ 等都不能再约化, 则称此 $\Gamma^{(a)}(g_s), \dots$ 为“完全约化的”或“不可约表示”, 而 $\Gamma^{(a)}(g_s), \dots$ 等不可约表示, 但表示论的中心任务就是要找到群的全部不等价不可约表示, 这些表示的相直子空间都是不变子空间, 设集合

$$W = \{L_a, L_b, \dots, L_c\}, \forall L_i \in W, \forall g_s \in G, \text{有 } g_s L_i \subset L_i.$$

5. 表示的幺正性

定理 3.5.1 有限群的每一个等价表示类中, 都有一个幺正表示.

证明 设 $\Gamma^{(a)}(g_s)$ 为群 G 的一个表示, 构造以下矩阵,

$$W = \sum_{g_s \in G} \Gamma^{(a)*}(g_s) \Gamma^{(a)}(g_s)$$

可直接验证矩阵 W 是厄米矩阵, $W^* = W$.

此外, 对于给定 $\Gamma^{(a)}(g_s)$,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(a)*}(g_\beta) W \Gamma^{(a)}(g_\beta) &= \sum_{g_s \in G} \Gamma^{(a)*}(g_\beta) \Gamma^{(a)*}(g_s) \Gamma^{(a)}(g_s) \Gamma^{(a)}(g_\beta) \\ &= \sum_{g_s \in G} (\Gamma^{(a)}(g_s) \Gamma^{(a)}(g_\beta))^* (\Gamma^{(a)}(g_s) \Gamma^{(a)}(g_\beta)) \\ &= \sum_{g_s \in G} \Gamma^{(a)*}(g_s g_\beta) \Gamma^{(a)}(g_s g_\beta) \\ &= W, \end{aligned}$$

即 $\Gamma^{(a)}(g_\beta) W \Gamma^{(a)}(g_\beta) = W$, 由于 W 的厄米性, 故可将 W 表为 $W = X^* X$ (X 为 $n \times n$ 正定矩阵), 且 X 非奇异, 即将表示 $\Gamma^{(a)}(g_s)$ 变为正交矩阵 $\Gamma^{(a')}(g_s)$ 的变换矩阵, 即

$$\Gamma^{(a')}(g_s) = X \Gamma^{(a)}(g_s) X^{-1}.$$

事实上, 对任意 $g_s \in G$, 应有

$$\begin{aligned} \Gamma^{(a')}(g_s) \Gamma^{(a')}(g_s)^* &= (X \Gamma^{(a)}(g_s) X^{-1})^* (X \Gamma^{(a)}(g_s) X^{-1}) \\ &= (X^{-1})^* \Gamma^{(a)*}(g_s) X^* X \Gamma^{(a)}(g_s) X^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (X^*)^{-1} \Gamma^*(g_s) W \Gamma(g_s) X^{-1} \\ &= A^{-1} B X^{-1} A = A^{-1} A^{-1} X X \\ &= E \quad (n \times n \text{ 单位矩阵}). \end{aligned}$$

本定理可以进一步推广为联系两个等价的可表示的相似变换, 包以, 以是么样的.

定理称为“推广”, 它的适用范围可推广到有限群和无穷紧致连续群. 注意定理推广的关键是构造已知若且对于有限群, 求和项数有限, 且必然存在推广到连续群.

$\sum_{g_s \in G}$ 换成对群参数积分

$$|\Gamma^*| = |\Gamma| \int_G d\mu$$

如果积分收敛, 则且亦存在对于紧致群, 群参数只在参数空间有某范围内取值, 积分收敛, 故定理成立. 至于非紧致群, 其各论群定理已式, 但一般情况, 对于非紧致群本定理不成立.

等价的引入, 使得本群的全部表示, 均成为等价类本群的全部不等价的表示, 可归类的引入, 使得本群的全部表示, 均成为等价类本群的全部不等价的表示, 不可约的表示表示.

舒尔引理是群论的一个基本定理, 在群表示理论中极其重要的地位. 在此对有限群的情况加以推广, 使得其推广到连续紧致群.

Schur 引理一: 设 Γ^* 为 G 的不可约表示, 其维数为 M , M 为 G 的不可约表示, 对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 有 $M\Gamma^* \subseteq \Gamma^* \subseteq M$, 且 $M = \lambda\Gamma^*$ 是单值表示.

证明: 设 Γ^* 为 M 的本征矢, 由 $M\Gamma^* = \lambda\Gamma^*$, 令 $\Gamma^* = \Gamma^*$, 则 $M\Gamma^* = \lambda\Gamma^*$, 本征矢, 本征值亦为 λ , 事实上,

$$Mx_0^* = M\Gamma^*(g_s)x_0 = \Gamma^*(g_s)Mx_0 = \lambda\Gamma^*(g_s)x_0 = \lambda x_0^*$$

$$\text{即 } x_0^* = \lambda x_0^*, \quad \forall x_0^* \in \Gamma^*, \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ 表示 } \Gamma^* \text{ 的本征值, } \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0.$$

$$\Gamma^*(g_s)x_0^* = \Gamma^*(g_s)\Gamma^*(g_s)x_0 = \Gamma^*(g_s g_s)x_0$$

$$\Gamma^*(g_s) = \Gamma^*(g_s) \Gamma^*(g_s) = \Gamma^*(g_s g_s)$$

即在任何群元作用下, Γ^* 是封闭的. 也就是本征值 λ 不变.

且已知 $\Gamma^*(g_s)$ 为不可约表示, 因此本征值 λ 不变. 因此, 这意味着只会有下述两种情况.

(1) Γ^* 为单值表示, 且在任何群元作用下, 本征值 λ 不变. 这种情况应予否定. 这样, 唯一可能的情况是 (2).

(2) $\Gamma^* = \Gamma^*, \quad \forall \Gamma^* \in \Gamma^*$, 即 Γ^* 有属于 Γ^* 的本征矢, 本征值为 λ , 即 M

从而

Schur 引理一 的推论即成为: 由下例例子可以推知, 的确如此.

例 3.5.6 同构表示 $\Gamma \cong \Gamma'$ 一定可以化为直和形式, $\Gamma \cong \Gamma'$ 为 l 维, Γ, Γ' 为 l' 维

$$X^{-1}\Gamma(g_s)X = \begin{bmatrix} D^{(1)}(g_s) & O \\ O & D^{(2)}(g_s) \end{bmatrix}$$

此矩阵显然可与非常数矩阵

$$M = \begin{bmatrix} \lambda I & O \\ O & \lambda' I \end{bmatrix}, \lambda \neq \lambda', I, I' \text{ 为 } l, l' \text{ 阶单位矩阵, 非零矩阵.}$$

对易, 这就是舒尔引理一的逆命题.

Schur 引理二 设 $\Gamma \cong \Gamma' \cong \Gamma'' \cong \dots \cong \Gamma^{(k)}$ 为 k 个互不等价的不可约表示, 则系数分别为 $l, l', l'', \dots, l^{(k)}$ 的 k 个非 M 矩阵 $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \dots, \Gamma^{(k)}$ 有 $MM^+ \cong \Gamma \otimes \Gamma^* \cong M$ (零阵).

证明 表示 $\Gamma \cong \Gamma' \cong \Gamma'' \cong \dots \cong \Gamma^{(k)}$ 都互不相容, 相似变换化与式 (3.5.6) 表示, 则令 M 为不同相似变换而改变, 故只需证明 $\Gamma \otimes \Gamma^* \cong \Gamma \otimes \Gamma^* \cong \dots \cong \Gamma \otimes \Gamma^* \cong M$ 表示成立, 从而 M 并不失一般性.

在上式两端取厄米共轭, 并注意到

$$\Gamma^* \cong \Gamma^*, \Gamma'^* \cong \Gamma'^*, \Gamma''^* \cong \Gamma''^*, \dots, \Gamma^{(k)*} \cong \Gamma^{(k)*},$$

得

$$\Gamma^* \cong M^+ \cong M \otimes \Gamma^* \cong \Gamma \otimes \Gamma^* \cong M.$$

用 M 左乘此式, 并利用题设条件, 有

$$M\Gamma^{(k)}(g_s)M^+ = MM^+\Gamma^{(k)}(g_s) = \Gamma^{(k)}(g_s)MM^+.$$

由 Schur 引理一, $MM^+ = \lambda E_l \otimes E_{l'} \otimes \dots \otimes E_{l^{(k)}}$, 则非零 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则题设条件变为

$$\Gamma \otimes \Gamma^* \cong MM^+ \cong M$$

但已知 $\Gamma \otimes \Gamma^* \cong \Gamma \otimes \Gamma^* \cong \dots \cong \Gamma \otimes \Gamma^* \cong M$ 是等价的, $MM^+ \neq 0$, 故 M 的秩 $\text{rank } MM^+ = \lambda E_2(l_a \times l_b)$, 因此

$$\det M = \det M^+ = (\lambda)^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

另一方面, $MM^+ = \lambda E_2(l_a \times l_b)$, 即

$$\lambda = \sum_{\mu=1}^l M_{\mu\mu} = \sum_{\mu=1}^l M_{\mu\mu} = \dots = \lambda,$$

即 $M_{\mu\mu} = \lambda, \mu=1, 2, \dots, l$. 若 $\lambda \neq 0$ 为确实起见, 令 $\lambda = 1$ 将 M 阵乘以 $1/\lambda$ 即可, 则 M 变成 $\lambda = 1$ 的方阵 N , 由矩阵乘法 $(N \otimes N \otimes \dots \otimes N)MM^+$ 代入 (3.5.6) 式, 有 $N \otimes N \otimes \dots \otimes N$ 此时完全等同于 (3.5.6) 的情况, 故知 N 为零矩阵, 故 M 为零矩阵. 由此第一引理得证.

数 FC 在 $\text{Hom}(V, V)$ 的一个表示, 其在 G 上的限制得到 G 的一个表示, 因而研究群的表示与研究群代数的表示是一回事. 代数的表示可通过代数上的模来研究, 因而群的表示可通过群代数的模来研究. 与代数表示一样, 我们定义了群的不可约表示、忠实表示, 以及正则表示等. 另在于把代数换成群代数来叙述.

根据以上分析, 群表示论的基本问题之一是决定群 G 在域 F 上的所有不等价的不平凡表示, 而这等价于决定 F 上方为不同构的不可约 FG -模. 由 Maschke 定理知, 当域 F 的特征为零或其特征 p 整除 $|G|$ 时, 不可约 F -模 (或单 F -模) 可以完全确定, 因为对群 G 的表示的研究, 与 G 方为不可约表示的研究. 而当 F 的特征整除 $|G|$ 时, 情况就大不相同了, 前者称为常表示, 后者称为模表示.

设 G 表示有限群, 下面考虑的 FG -模是有有限度的, 或等价地说, 作为 C 向量空间是有有限维的, 其中 C 是复数域. 因为 C 是特征为零的代数闭域, 由半单代数的结构定理我们可得群代数 C 的深刻特征.

定理 3.6.1 若把 C 看作方 C -代数, 则存在 $r \in \mathbb{N}$ 以及 $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ 使得 $C \cong M_{n_1}(C) \oplus \dots \oplus M_{n_r}(C)$.

若把 C 看作方 C -模, 则恰好有 r 个单 C -模的同构类, 若令 S_1, \dots, S_r 构类的代表, 则可适当调整次序使得

$$C \cong n_1 S_1 \oplus \dots \oplus n_r S_r,$$

其中对每个 i 来说, $\dim_i S_i = n_i$.

若 M 是一个 CG -模, 则 $M \cong a_1 S_1 \oplus \dots \oplus a_r S_r$, 其中 a_i 是那确定的非负整数.

证明 由定理 3.1.1 及 3.1.3 可得 C 是 S 的直和, 故 S 是由 n 维列向量构成的向量空间, 依此基来乘, S 自成 $M_n(C)$ -模, 由定理 3.1.1 及 3.1.3 可得 C 自由定理 3.1.1 可得 (3).

这 r 个单 CG -模的维数 n_1, \dots, n_r 称为 C 的度数. 凡 CG -模 C 是一维的, 因而是单模, 故 C 的度数中至少有一个等于 1. 按照惯例, 我们记 $n = 1$.

定理 3.6.2 n_i 如定理 3.6.1 所设, 则 $\sum n_i^2 = |G|$.

证明 由定理 3.6.1 可得,

$$C \cong \dim C \cdot C = \dim C \cdot M_1(C) = \sum n_i M_i(C) = \sum_i n_i^2 S_i,$$

下面我们给单 CG -模的个数与群 G 的共轭类的个数.

定理 3.6.3 单 CG -模的个数等于群 G 的共轭类的个数.

证明 设 Z 是 CG 的中心, 由定理 3.1.3 易知, Z 同构于 $M_1(C) \oplus \dots \oplus M_1(C)$ 的中心, 因而可构于每个 $M_{n_i}(C)$ 中心的直和 $M_1(C)$ 中心由数量矩阵组成, 从而它与 C 同

构,于是 $Z \subseteq C$. 特别地, $\dim_C Z = r$.

设 $\sum_{g \in G} k_g g \in Z$, 对任意的 $h \in C$, 我们有

$$\left(\sum_{g \in G} k_g g \right) h = h \left(\sum_{g \in G} k_g g \right).$$

由此得

$$\sum_{g \in G} k_g g = \sum_{g \in G} k_g h^{-1} g h = \sum_{g \in G} k_{hgh^{-1}} g,$$

因而对任意的 $g, h \in G$, 我们有 $k_g = k_{hgh^{-1}}$,

这就是说, Z 中元素的系数在 G 的共轭类上是常数, 因而 Z 的一个基是由形如 $\sum_{g \in C_i} g$ 的这样一些元素构成, 其中 C_i 是 G 的共轭类, 于是 $\dim Z$ 等于群 G 的共轭类的个数.

由于特征标 χ 也是由 $\chi(g) = \chi(hgh^{-1})$ 来定义的, 这里介导的特征标的概念就是以迹函数的语言来定义的.

定义 3.6.2 设 V 是 F 上的 n 维线性空间, ρ 是 V 上的一个可逆线性变换, $\chi \rightarrow \chi \rho$, 我们定义 χ 的特征标是一个函数 $\chi \rho: G \rightarrow F$, 其中 $\chi \rho(g)$ 是 χ 定义的 U 的可逆线性变换的迹.

例如, $\chi(g) = \dim U$, $\chi \rho(g) = \dim U$, $\chi \rho(g) = \chi(g)$ 在 F 上的线性表示, 则 $\chi \rho(g)$ 恰好等于 $\rho(g)$ 的迹.

群 G 的任何两个共轭类的特征标值是相同的, 这是因为对任意的 $g, h \in G$, gh 和 hg 在 U 上的线性变换是相似的, 因而有相同的主对角线, 于是 $\chi(gh) = \chi(hg)$, 故 G 模有相等的特征标.

设 $I = \{g \in G \mid \chi(g) = 0\}$, I 是 G 在 F 上由 χ 定义的线性变换的核子, 则 $\chi(g) = 0$ 恰好等于 I 中元素 g 的 n 个元素为 0. 因此, I 是 G 的一个正规子群, 且 $\chi(g) = 0$, $\chi_I(g) = 0$, 这个特征标称为 G 的正则特征标.

定义 3.6.3 设 χ_1, \dots, χ_r 表示 G 模 V 上的 r 个互不相同的特征标, 这些特征标称为 G 的不可约特征标, 记为 $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$.

为了要找 χ_1, \dots, χ_r 是 G 模 V 上的 r 个互不相同的特征标, 我们只需找 r 个线性变换使得对每个 i , 来说, $\chi_i(g) \neq 0$ 另外, 用 χ 表示 χ 在 F 上的迹, χ 表示 χ 在 F 上的迹, 则 χ 为 G 的主特征标.

显然, 对所有的 $g \in G$ 来说, $\chi_1(g) = 1$. 有时也记 $\chi_1 = 1_G$.

由于 G 模的特征标称为线性特征标, 所以 G 模一定是单模, 故线性特征标必定是不可约的. 线性特征标等价于群 G 的复数乘群 F 的一个同态, 这是因为, 若 χ 是 G 模 V 的一个线性特征标, 则对 $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$, 我们有 $\chi(\lambda g) = \chi(g)$, $\chi(\lambda g) = \chi(g)$.

$\chi \circ \kappa$ 是由 κ 定义的 S 上的一个线性变换的迹. 现在我们把 χ 线性扩张为 CG 到 C 的一个线性映射, 使得对任意的 $\alpha \in CG$, $\chi(\alpha)$ 是 S 上定义的 S 上的一个线性变换的迹. 容易看出, 由 κ 定义的 S 上的一个线性变换是恒等变换, 因而 $\chi(\kappa) = \dim S$. 若 $\alpha \neq \kappa$, 则由 κ 定义的 S 上的一个线性变换是零变换, 因而 $\chi(\alpha) = 0$. 设 $k_1, \dots, k_{n-1} \in C$, $n-1 \sum_{i=1}^{n-1} k_i \chi$

对每个 i 来说, $\sum_{i=1}^{n-1} k_i \chi(\alpha_i) = \chi(\alpha_i)$. 于是对所有的 i 来说, $k_i = 1$. 由此得证.

引理 3.6.6 对任意 CG 模 U 和 V 来说, $\chi(U \otimes V) = \chi(U) \chi(V)$.

证明 把 U 的一个基 u_1, \dots, u_n 和 V 的一个基 v_1, \dots, v_m 一起构成 $U \otimes V$ 的一个基, 则对任意的 $\alpha \in G$ 我们有 $\chi_{U \otimes V}(\alpha) = \chi_U(\alpha) \chi_V(\alpha)$, 结论得证.

由引理 3.6.6 的证明可知, 若 χ 和 ψ 是 CG 的特征标, 则我们可定义由 CG 到 C 的实函数 $\chi + \psi$, 其中 $\chi + \psi = \chi_U + \chi_V$, $\chi_U(\alpha) = \chi(\alpha)$, $\chi_V(\alpha) = \psi(\alpha)$. 则 $\chi + \psi$ 也是 CG 的特征标.

下面我们利用特征标来判定两个 CG 模是否是同构的一个准则.

定理 3.6.7 如果 χ_1, \dots, χ_n 是不同的非零 CG 模 U_1, \dots, U_n 的特征标, 则 χ_1, \dots, χ_n 是 CG 模 $U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n$ 的特征标, 其中 n 是任意正整数. 从而对 CG 模 U 和 V 而言, 只要 U 和 V 的特征标是相等的.

证明 由引理 3.6.6 可得定理的第一个结论. 设对 CG 模 U 和 V 来说, $\chi = \chi_U$, $\psi = \chi_V$ 均为非零单标. 不妨设 $U = U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n$, 其中 U_i 和 V_i 是非负整数. 若特征标得 $\chi = \chi_U = \chi_{U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n} = \chi_{U_1} \chi_{U_2} \chi_{U_3} \dots \chi_{U_n}$. 且 $\psi = \chi_V = \chi_{V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_m}$. 对 $\forall U_i, V_j$, 有 $U_i \otimes V_j = U_{i+j}$.

在同构意义下, 一个特征标可唯一确定一个 CG 模, 且已知某 n 个模的特征标, 我们可设有一个一般的方法来构造这个模. 利用特征标可模, 其结果不甚令人满意. 然而, 如果我们看到, 特征标能有效地把群 G 所表示的所有信息得到本身的信息, 因此下面我们把注意力从 CG 模转向它们的特征标.

事实上, 当我们知道, 若 U 和 V 是 CG 模, 则 $U \otimes V$ 和 $\text{Hom}(U, V)$ 也是 CG 模. 下面我们考虑这两个 CG 模与 U 和 V 之间的关系.

定理 3.6.8 设 U 和 V 是 CG 模, 则:

$$(1) \chi_{U \otimes V} = \chi_U \chi_V;$$

$$(2) \chi_{U^*} = \overline{\chi_U}, \text{ 其中 } U^* = \text{Hom}(U, V);$$

$$(3) \chi_{\text{Hom}(U, V)} = \chi_U \chi_V$$

证明 (1) 设 $\mu \in G$, 由定理 3.6.4 (1) 知, μ 在 U 上定义的线性变换是可对角化的. 令 μ_1, \dots, μ_n 是 U 的特征值向量构成的一个基, 其对 μ 的特征值分别是 μ_1, \dots, μ_n . 类似地, 令 ν_1, \dots, ν_m 是 V 在 V 上定义的线性变换的特征向量构成的一个基, 其对 μ 的特征值分别是 ν_1, \dots, ν_m . 于是由定理 3.6.4 (2) 我们有

这个函数具有下列性质:

1) $\forall \alpha, (\alpha, \alpha) \geq 0$, 且 $(\alpha, \alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$;

2) 对 $\forall \alpha, \beta, (\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$;

3) 对 $\forall \alpha, \beta$ 以及 $k \in C, (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$;

4) 对 $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta, (\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$;

5) 对 $\forall \alpha, \beta$ 以及 $k \in C, (\alpha, k\beta) = \overline{k}(\alpha, \beta)$;

6) 对 $\forall \alpha, \beta_1, \beta_2, (\alpha, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha, \beta_1) + (\alpha, \beta_2)$.

最后, 我们给出特征值的定义. 设 T 是 V 上的线性变换, 则 T 的特征值 λ 的定义如下:

如果 $Tu = \lambda u$, $u \in U$, $Tu = \lambda u$, $u \neq 0$, 则 λ 是 T 的特征值.

定理 3.6.11 若 T 是 V 上的线性变换, 则 T 的特征值 λ 满足:

证明 设 $Tu = \lambda u$, $u \in U$, 则对 $\forall u \in U$, $Tu = \lambda u$, 由此可见 λ 是 T 的特征值.

定义 3.6.12 设 T 是 V 上的线性变换, 则 T 的特征值 λ 满足: λ 是 T 的特征值, 当且仅当 T 可对角化, T 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$. 设 T 是 V 上的线性变换, 则 T 的特征值 λ 满足: λ 是 T 的特征值, 当且仅当 T 可对角化, T 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$. 因而 $u \in U$.

反之, 设 $u \in U$, 则我们有

$$|G|au = (\sum_{g \in G} g)u = \sum_{g \in G} gu = \sum_{g \in G} u = |G|u,$$

因此 $au = u$, 从而得到 $u \in U$. 故 T 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$ 的充要条件是 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$. 由此可得 T 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$. 结论得证.

定理 3.6.12 设 T 是 V 上的线性变换, 则 T 的特征值 λ 满足: λ 是 T 的特征值, 当且仅当 T 可对角化, T 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$.

证明 首先我们证明 T 可对角化. 设 T 是 V 上的线性变换, 则 T 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$. 设 T 是 V 上的线性变换, 则 T 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$. 因而 $u \in U$. 这就证明了 T 可对角化.

其次, 我们证明 T 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$. 设 T 是 V 上的线性变换, 则 T 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$. 因而 $u \in U$. 这就证明了 T 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$.

$$\dim_C \text{Hom}_C(U, V) = \dim_C \text{Hom}_C(U, V)^G$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}_C(U, V)}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_U(g) = (\chi_V, \chi_U)$$

因为 (χ_V, χ_U) 是实数, $(\chi_U, \chi_V) = \overline{(\chi_V, \chi_U)} = \dim_C \text{Hom}_C(U, V)$.

下面我们继续研究特征标的基本性质.

行正交定理 对 $\forall i, j$ 来说, $(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$.

证明 设 χ_1, \dots, χ_n 是全部的单值特征标. 由定理 3.6.12 知, 对 $\forall i, j$, (χ_i, χ_j)

由 $\text{Hom}(S_i, S_j) \cong \chi_j \chi_i^{-1}$, $\text{Hom}(S_i, S_i) \cong \chi_i \chi_i^{-1} = 1$ (又由 Schur 定理, 当 $i \neq j$ 时, $\text{Hom}_{G_0}(S_i, S_j) = 0$).

上述定理告诉我们对 $\forall i$ 和 j ,

$$a_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in G} \chi(\chi_i^{-1} \chi_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in G} \chi(\chi_i^{-1}) \chi_j = \delta_{ij}.$$

其中, δ_{ij} 是 Kronecker 代表元, $\delta_{ij} = 1$ 当 $i = j$ 时, 否则为 0. 若对 i 取一个数, 当我们把特征标的所有右 G 右向量时, 我们则可以说特征标表的任意两行关于内积是正交的, 这就是正交定理名称的来源. 由正交定理, 我们得到许多重要的结果.

推论 3.6.13 G 的所有约特征标是 G 的类函数构成的向量空间 $V(G)$ 的一个正交基.

推论 3.6.14 设 $\alpha = \sum a_i \chi_i$ 和 $\beta = \sum b_i \chi_i$ 是 G 的广义特征标, 则 $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum a_i b_i$.

定理 3.6.15 设 α 是 G 的特征标, χ_1, \dots, χ_n 是 G 的广义特征标, $\alpha = n\chi_1$ 仅当 α 是 $n\chi_1$ 不可约特征标的和.

证明 设 $\alpha = \sum_i \chi_i$, 其中, χ_i 是广义特征标, 由定理 3.6.2 有 $\langle \alpha, \alpha \rangle = \sum_i \langle \chi_i, \chi_i \rangle$. 若 $\alpha, \alpha = n\chi_1$, 则 χ_1 是 G 的广义特征标, $\chi_1^2 = \chi_1$, 故 $\chi_1 = 1$. 对于其他的 χ_i , 在这种情况下, α 是 n 个不可约特征标的和.

反之, 由定理 3.6.2 直接可得.

定理 3.6.16 设 χ 是 G 的一个广义特征标, χ_i 为 G 的不可约特征标. χ 可线性表示, 且表示式是唯一的. χ_i 在 χ 中的系数是 a_i/n .

一般地, 若 $\chi = \psi + \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_n$ 是 G 的广义特征标, 且 χ_i 对所有的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 都有 $\langle \psi, \chi_i \rangle$ 是非负整数.

证明 由定理 3.6.2 有 $\langle \chi, \chi \rangle = \sum_i \langle \chi_i, \chi_i \rangle$, 且 χ_i 是广义特征标, 则 $\langle \chi, \chi_i \rangle = a_i$.

对于 χ 个任意 χ_i 和 χ_j , 若 χ_i 是 G 的广义特征标, 由定理 3.6.2 可知结论成立. 反之, 由推论 3.6.14 知 $\langle \chi, \chi \rangle = \sum_i \langle \chi_i, \chi_i \rangle$, 其中 χ_i 是广义特征标, 由假设得 a_i 是非负整数, 于是 a_i 是一些不可约特征标之和, 故 χ 是 G 的特征标.

问题 3.6

设 G 是 n 阶群, G 的广义特征标 χ 用 G 的 n 个类表示, 系数为 $\chi(1), \dots, \chi(n)$. 若 $M = \sum_{i=1}^n \chi_i^{-1} \chi_i$, 证明 G 的表示 $M = M^T$.

证明群 G 的不可约表示与一维表示的乘积是不可约表示.

若群 G 的表示 χ 是 G 的特征标, 证明 χ 在 G 中的内积 $\langle \chi, \chi \rangle = 1$, 证明此表示不

可约.

1. 若 Γ 是 G 的特征标, 则 Γ 与 Γ^* 互为可约表示或不可约表示, 这里 $\{\Gamma^*(g_s)\}$ 是 $\{\Gamma(g_s)\}$ 的复共轭.

§ 3.7 群的特征标表

由 3.6 节我们知道, G 的任何一个特征标 χ 是 G 的 n 个不可约特征标的 \mathbb{C} -线性组合, 由定理 3.6.1 知, χ 属于 G 的共轭类的个数 n 为每一个不可约特征标, 是由它在 G 的每一个共轭类上取值 n 个确定. 由 G 的特征标 χ 与 G 的 n 个不可约特征标在 G 的 n 个共轭类上的值确定. 记这 n 个数组成 $n \times n$ 矩阵 χ 称为 G 的特征标表.

显然, 由上述定理取这个表的行和 χ_i 的 n 系, G 的特征标表是唯一确定的.

令 Γ 表示 G 的特征标表, 则 $\Gamma = (\chi_i(g_j))$, $i, j = 1, \dots, n$, 其中 χ_1, \dots, χ_n 是 G 的 n 个共轭类的代表元 g_1, \dots, g_n . 特征标表的第 i 行由 χ_i 的 n 个数组成. 般地, 我们记 G 的特征标表 Γ 写为以下形式:

$$\begin{matrix} & \chi_1 & \chi_2 & \cdots & \chi_n \\ \chi_1 & \chi_1(g_1) & \chi_1(g_2) & \cdots & \chi_1(g_n) \\ \chi_2 & \chi_2(g_1) & \chi_2(g_2) & \cdots & \chi_2(g_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_n & \chi_n(g_1) & \chi_n(g_2) & \cdots & \chi_n(g_n) \end{matrix}$$

其中 n 是 G 的阶数, $k = 1, 2, \dots, n$ 是 G 的所有共轭类的元素个数, χ_k 是 χ_k 特征标.

定理 3.7.1 如果 χ 是 G 的一个线性特征标, $\alpha\chi$ 是 G 的一个不可约特征标, 则 $\alpha\chi$ 是 G 的一个不可约特征标.

证明 因为 χ 是线性的, 由定理 3.6.1 可得, $\alpha\chi$ 是单位根, 其中 $\alpha \in \mathbb{C}$. 特别地, 对于 $\forall k \in G$, $\alpha\chi(g_k) = \alpha\chi(g_k) = \alpha\chi(g_k)$, 由 3.6 节定理, 我们有

$$\begin{aligned} (\alpha\chi, \alpha\chi) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g)\chi(g) \overline{\alpha(g)\chi(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi(g)} \alpha(g) \overline{\alpha(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi(g)} = (\chi, \chi) = 1. \end{aligned}$$

再由推论 3.6.3 知 $\alpha\chi$ 是不可约的.

列正交定理 如果 χ_1, \dots, χ_n 是 G 的共轭类的代表元, k, \dots, k' 分别是这些共轭类

反之, 因 χ 对每个 i 来说, $\chi \in \chi_i(G)$, 从而 $\chi \in \bigcap_{i=1}^g \chi_i(G)$, 其中 $i = 1, \dots, g$. 设 χ 是 G 的正则特征标, 则对任意的 $\chi \in \text{Irr}(G)$, 我们有

$$(\rho, \chi) = \frac{1}{|G|} \rho(1) \chi(1) = \chi(1),$$

于是 $\chi = \chi(1) \chi$, 且对 $\chi \in \text{Irr}(G)$, 若 $\chi_k \in \bigcap_{i=1}^g \chi_i(G)$, 则 $\chi_k = \chi(1) \chi_k = \chi(1) \chi$, 于是 $g = 1$.

定理 3.7.4 G 是单群当且仅当对某个 $1 \neq \chi \in G$, 使得 $\chi(g) = \chi(1)$ 的 G 的某个不可约特征标 χ 只能是主特征标 χ_1 .

证明 设 G 是单群, 因存在 G 的一个非平凡子群 H , 使得对 G 的某个不可约特征标 χ 来说 $\chi(H) = \chi(1)$, 从而 χ 是 χ 为主特征标. 否则, χ 有人 H 为 G 的非平凡子群, 矛盾.

反之, 若 G 不是单群, 因存在某个 $1 \neq H < G$ 使得 $\chi(H) = \chi(1)$, 由定理 3.7.3 知, 存在某个 χ_i , 使 $\chi \in \chi_i(G)$, 因为 χ 是 χ 的长, 故 $\chi_k = \chi(1)$, 而对 $\chi_k \in \bigcap_{i=1}^g \chi_i(G)$, 定有 $\chi_k = \chi(1) \chi$, χ 与 χ_k 是特征标互相矛盾, 故 χ 是主特征标 χ_1 .

定理 3.7.5 G 的主特征标 χ_1 的正规子群 H 是 G 的可解群.

证明 由定理 3.7.4 知, G 的特征标 χ_1 使得我们只能确定 G 的所有正规子群, 以及 χ_1 正规子群之间的包含关系, 因有可确定 G 的正规子群 H 列以及正规列中每组的阶. 特别地, 我们可确定 H 是否有一个正规列且其相邻基群的商群为 p -群. 由此即可判断 H 是否为可解群. 对 G 的特征标 χ , 定有 $\chi = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_r$, 经常把 χ 简记为 χ .

引理 3.7.6 设 χ 是 G 的特征标, $\chi \neq \chi_1$, 而且 χ 是不可约的, 则

$$Z_1/K_1 = Z(C/K_1).$$

证明 设 $g \in C$, 由定理 3.7.4 知, 若 $g \in Z$, 则 $\chi(g) = \chi(1)$. 再由定理 3.7.3 知, $\chi(g) = \chi(1)$ 是 χ 的长. 因而 $\chi_k = \chi(1)$ 且仅当 k 恰好有一个特征值. 如果 $g \in Z$, 则 $\chi(g)$ 是 χ 的特征值, 若 U 是与 χ 相对 G 的 G 模, 则对 $\forall u \in U$, 我们有 $gu = \chi(g)u$. 由此可知, 若 $g \in Z$, 则对 $\forall u \in U$, 我们有 $(gh)u = \chi(g)\chi(h)u$, 因而 $\chi(h) = \chi(1)\chi(h)$, 由此得 $\chi(h) = \chi(1)$, 也即 $h \in Z \cap C = Z$.

设 $\psi: G \rightarrow GL(V)$ 是与 χ 相对 G 表示, 则对 $\forall u \in Z \cap C, \psi(u)$ 在 V 的任何一个基上对点化矩阵是数量矩阵, 因而 $\psi(u) \in Z \cap C$, 从而 $\psi(u) \in C \cap K$, 故 $Z \cap K = Z \cap C \cap K$. 设 χ 是不可约的, 若 $\chi \in C \cap K$, 则对任意的 $x \in C$ 来说, $\psi(x) = \chi(x)\psi(u)$, 因此映射 $u \mapsto gu, u \in U$ 是 G 模 U 的一个自同态. 因为 χ 是不可约的, 故 U 是单模. 由 Schur 引理得 $\text{End}_G(U) \cong C$.

这意味着存在一个复单位根 ω 使得对任意的 $u \in U$ 都有 $gu = \omega u$. 于是我们有 $\chi(g) = \chi(1)\omega$, 由此得 $|\chi(g)| = \chi(1)$, 因而 $g \in Z$. 综上所述

$$Z_i/K_i = Z(C/K_i).$$

引理 3.7.7 若 G 是非交换单群, 则对任意的 $i \geq 1$ 都有 $Z_i = 1$.

证明 若 $i = 1$, 则 $K_1 = 1$, 由引理 3.7.1 可得, $Z_1 = Z(G) = 1$.

定理 3.7.8 $Z(G) = \bigcap_{i=1}^{\infty} Z_i$.

证明 设 χ 是 G 的特征标, 则

$$Z(G)K_i/K_i \leq Z(G/K_i), Z(G)K_i/K_i \leq Z_i/K_i,$$

因而对每个 i 来说, $Z(G) \leq Z_i$.

反之, 设对 $\forall i$ 来说, $\chi_i \neq 1$, 因为 $\chi_i \neq 1$, 由此得知, 对 $\forall i$ 以及 $i \geq 1$ 来说, 又有命题 (a), (b) 知, $K_i \cap \dots \cap K_i = 1$ 故对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 都有 $\chi_i \neq 1$, 且有 $\chi_i \in Z(G)$, 结论得证.

定理 3.7.9 设 $\chi \in G$, 则 $G \setminus \chi$ 的不可约特征标, 可由 G 的不可约特征标来确定.

证明 设 χ 是 G 的不可约特征标, χ 含在其核中. 令 I 是 χ 对应的单 $(G \setminus \chi)$ 地作用在 I 上, 故对 $\chi \in \chi \setminus (G \setminus \chi)$, $\chi_i \neq 1$, 若 $\chi_i \in \chi \setminus \chi_i$, 则 I 也是 χ_i 的 $(G \setminus \chi)$ 核. 因为 I 是单 $(G \setminus \chi)$ 模, 故 I 也是 χ_i 的 $(G \setminus \chi)$ 核, 且 χ_i 的特标是 $\chi_i \setminus \chi_i$. 这就是说, 核包含 χ 的 G 的特标, 以及 $G \setminus \chi$ 的特标.

另一方面, $G \setminus \chi$ 的每个不可约特征标 χ_i 含 χ 的核包含 χ 的一个不可约特征标, 因而 $G \setminus \chi$ 的不可约特征标可由 G 的不可约特征标来确定.

推论 3.7.10 G 的特标表可以用 Z 表 (是否为零群).

证明 考虑 G 的 Z 中元素 $1, \chi, \chi^2, \dots$, 对每个 χ 来说, 我们有

$$Z_i \leq G, Z_i/Z_{i-1} = Z(G/Z_{i-1}).$$

由定理 3.7.8 知每个 Z_i 可由 Z_i/Z_{i-1} 的不可约特征标来确定.

因为每个 Z_i/Z_{i-1} 的不可约特征标可由 Z_i 特标表来确定, 因此我们可由 Z 的特标表来确定 G 的 Z 中元素的每一单, 由此可判断 Z 是否为零群.

由推论 3.7.10 的论证过程可知, 若 G 为零群, 则由 G 的特标表可以确定 G 的零类.

问题 3.7

1. 计算 $|G|$.

2. 证明: G 中任意一行元素之和为非负整数.

3. 设 G 依照其轮换作用在 G 上, 计算 G 集 G 的特标, 确定不可约特征标的乘法.

1. 设 χ 是 G 的不可约特征标, $I \in G$ 是 G 看为 G 代数时它的直和子解. 且

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{|G||H|} \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} \chi_i(g) \psi_j(h) \overline{\chi_i(g)} \overline{\psi_j(h)} \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_i(g)} \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \psi_j(h) \overline{\psi_j(h)} \\
 &= (\chi_i, \chi_i)(\psi_j, \psi_j) = \delta_{ij} \delta_{ij}.
 \end{aligned}$$

特别地, 对 $\forall i$ 和 j , 有 $\chi_i, \chi_j \in \chi$, 上推论 (1) 可知 χ 是不可约特征标, 是 G/H 的不可约特征标, 进而, $\chi \in H$ 的不可约特征标的集合是 χ .

例 3.8.3 设 G 是交换群, 则 G 的特征标类含有 $|G|$ 个元素 (或 $|G|$ 个特征标). 知 G 有 $|G|$ 个不可约特征标, 又上推论 (1) 知 $\sum_{i=1}^{|G|} \chi_i^2 = |G|$.

现在对 G 个元素 $g \neq 1$, 也出 G 的所有不可约特征标都是线性的. 又 G 是循环群的子群, 于是 G 循环群的生成元 g 的 $|G|$ 个共轭类为 $g, \dots, g^{|G|}$, 由例 3.8.1 知 $\chi_i(g^j) = \chi_i(g)^j$, 由此对循环群的特征标类确定 (特征标).

我们知道 G 的不可约特征标 χ_i 与复数域 \mathbb{C} 的一个 $|G|$ 次单位根 ω 相对应, 且对 g^j 确定 $\chi_i(g^j) = \omega^{ij}$, 且 $\omega \neq 1$ ($|G|$ 次单位根, 因为 G 的不可约特征标与 $|G|$ 元有序数 $\omega^1, \dots, \omega^{|G|}$ 对应有一个 ω^j , 其中 ω^j 是一个 $|G|$ 次单位根).

作为 G 的一个例子, 令 $G = \langle g \rangle$, $|G| = 4$, $g^2 \neq 1$, 且 g 和 g^3 都是 G 的生成元, 由例 3.8.1 知 G 的 4 个不可约特征标对应于 2 元有序数组:

$$(1, 1), (\omega, \omega^3), (\omega^3, \omega), (1, -1).$$

于是 G 的特征标表是

| | 1 | g | g^2 | g^3 |
|----------|-----|------------|-------|------------|
| χ_1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| χ_2 | 1 | ω | 1 | ω^3 |
| χ_3 | 1 | ω^3 | 1 | ω |
| χ_4 | 1 | ω^2 | 1 | ω^2 |

表中的第 1 列和第 2 列与 g 的共轭类 $\{1\}$ 和 $\{g, g^3\}$ 对应, 而第 3 列和第 4 列与 g^2 的共轭类 $\{g^2\}$ 确定.

例 3.8.4 由 G/G' 是交换群知, G/G' 的不可约特征标都是线性的, 有引理 3.8.3 知我们, 由 G/G' 的每一个线性特征标 χ_i 都可得到 G 的一个线性特征标, 且 G/G' 不同的线性特征标都得到 G 不同的线性特征标. 设 χ 是 G 的线性特征标, 则 $\chi(G') = 1$. G' 是一个正规子群, 故其商群 G/G' 是交换群, 且 $|G/G'| = |G|/|G'|$, 而我们有 χ 是 G/G' 的线性特征标, 故 $\chi(G/G') = \chi(G/G')^{|G/G'|} = 1$, 这和 χ 的每一个线性特征标 χ_i 都可由 G/G' 的一个线性特征标 ψ 得到.

例 3.8.5 考虑 S_3 的特征标表, 已知 S_3 有一个共轭类 $1, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)$. 又 $S_3 = 1 \cup (1, 2) \cup (1, 3) \cup (2, 3)$, 故 S_3 有两个线性特征标, 由定理 3.6.2 知已往由 Z 的特征标得到. 令 χ, χ_3 是 S_3 的两个特征标, 则我们有

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ \chi & & \\ / & & \\ / & & \\ \chi & & \end{array}$$

由推论 3.6.2 知

$$6 = |S_3| = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 2 + n_3^2$$

由此得 $n_3 = 2$. 由列正交性得

$$0 = \sum n_i \chi_i((1, 2)) = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 2\chi_3((1, 2)),$$

$$0 = \sum n_i \chi_i((1, 2, 3)) = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 2\chi_3((1, 2, 3)),$$

由此得 S_3 的特征标表为

$$\begin{array}{ccc} & 3 & 2 \\ & (12) & (123) \\ \chi & & \\ / & & \\ / & & \\ \chi & & \end{array}$$

例 3.8.6 设 $\sigma, \tau \in S_n$ 为非交换群, 则我们可求出 σ, τ 的特征标表, 因为 S_n 的交换群有两个同构类, 这个例子说明, 不同构的群可能有相同的特征标表. 换句话说, 特征标表不能完全确定一个群.

已知 $\sigma \in S_n$, 因有 $\sigma \in S_n \setminus \{1\}$, 故 σ 是非交换群, 故 $\sigma, \sigma^2 \in S_n$ 是一阶交换群且 σ^2 循环群. 又 $\sigma \in S_n \setminus \{1\}$, 这样 $\sigma \in S_n \setminus \{1\}$ 且 $\sigma^2 \in S_n \setminus \{1\}$, 由例 3.8.1 知 σ 恰有一个线性特征标. 由推论 3.6.2, 我们有 $\sum_{i=1}^n n_i = n$, 且 $n_1 = 1, n_2 = 1, \dots, n_n = 1$, 这就使 $n = 1 + n - 2$ 设 τ 是 σ 的生成元, 则 $\tau \in S_n \setminus \{1\}$, 故 1 和 τ 恰在 σ 的两个不同的单元素共轭类中, 因而其余 $n-2$ 个共轭类的元素, 数均为 2 . 令 χ, χ_3 分别是这两个共轭类的代表元, 因为 $\sigma \in S_n$ 也是 σ^2 的生成元, 所以 χ, χ_3 在 σ, σ^2 中像必在不同的共轭类中. 利用例 3.8.5 中 χ, χ_3 的特征标表, 我们可获得 σ 的部分特征标表.

个共轭类的元素个数 k_i 分别为1, 15, 20, 12, 12. 因为 A_5 是单群, 我们不可能像直积的因子那样, A_5 的奇群的不可约特征标来获得 A_5 的不可约特征标. 然而, 由于 A_5 是置换群, 我们可用置换群具有的特征标来确定 A_5 的特征标表.

设 $X = \{1, 2, \dots, 5\}$, 且例3.6.3知, $\pi \cdot \chi_1$ 等于 χ_2 (χ_1 作用在 X 上不动点的个数), 因而我们有

| | 1 | 15 | 20 | 12 | 12 |
|--------------------|---|----------|-------|---------|---------|
| | 1 | (12)(34) | (123) | (12345) | (13524) |
| $\pi \cdot \chi_1$ | 5 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| χ_2 | 4 | 0 | 1 | -1 | -1 |

$$\chi_2 \text{ 方面, 我们又有 } (\pi \cdot \chi_1, \pi \cdot \chi_1) = \frac{1}{|A_5|} \sum_{g \in A_5} k_i (\pi \cdot \chi_1)(g)^2 \quad (4)$$

$$16 + 15 \times 0 + 20 \times 1 + 12 \times 1 + 12 \times 1 = 1.$$

由推论3.6.3知, $\pi \cdot \chi_1$ 是不可约特征标, 令 $\chi_2 = \pi \cdot \chi_1$.

设 Y 是 X 的 s 元子集组成的集合, 则 Y 是一个传递的 A_5 集, 令 ψ 是 (s) 块 (s) 的特征标, 则我们又有

| | 1 | 15 | 20 | 12 | 12 |
|---------------------|---|----------|-------|---------|---------|
| | 1 | (12)(34) | (123) | (12345) | (13524) |
| ψ | 5 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| $\psi \cdot \chi_1$ | 4 | 0 | 1 | -1 | -1 |

$$\chi_2 \text{ 方面, } (\psi \cdot \chi_1, \psi \cdot \chi_1) = \frac{1}{|A_5|} \sum_{g \in A_5} k_i (\psi \cdot \chi_1)(g)^2 \quad (5)$$

$$+ 20 \times 0 + 12 \times 1 + 12 \times 1 = 2.$$

由推论3.6.3知, $\psi \cdot \chi_1$ 是两个不可约特征标的积, 因为 Y 是传递的 A_5 集, 就像例3.6.1中的那样, 这两个不可约特征标都不等于 χ_1 . 我们又有

$$\begin{aligned} (\psi \cdot \chi_1, \chi_2) &= \frac{1}{|A_5|} \sum_{g \in A_5} k_i (\psi \cdot \chi_1)(g) \chi_2(g) \\ &= \frac{1}{60} (1 \times 9 \times 4 + 15 \times 1 \times 0 + 20 \times 0 \times 1 + 24 \times (-1) \times (-1)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

因而由推论3.6.1知, $(\psi \cdot \chi_1, \chi_2)$ 是一个特征标, 它既不等于 χ_1 , 也不等于 χ_2 .

令 $\chi = \psi \cdot \chi_1 - \chi_2$, 我们有 $n_1 = 0$, 又由推论3.6.1得, $\sum_{i=1}^5 n_i = 1$, 由此 $n_1 + n_2 = 1$, 从而 $n_2 = n_1 = 0$. 这样我们就得到 A_5 的部分特征标表 (见下表).

| | 1 | 15 | 20 | 12 | 12 |
|----------|---|----------|-------|---------|---------|
| | 1 | (12)(34) | (123) | (12345) | (13524) |
| χ_1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| χ_2 | 4 | 0 | 1 | -1 | -1 |
| χ_3 | 5 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| χ_4 | 3 | | | | |
| χ_5 | 3 | | | | |

令 $a = \chi_4((12)(34)), b = \chi_5((12)(34))$, 由列正交性, 我们有

$$0 = \sum n_i \chi_i((1,2)(3,4)) = 1 \times 1 + 4 \times 0 + 5 \times 1 + 3a + 3b,$$

因有 $a, b \in \mathbb{C}$, 由上述 $a + b = -4/3$ 及 $a^2 + b^2 = 4/3$ 可求得 a, b 为 ± 1 和 ± 1 方根之和, 故 $a, b \in \{-3, -1, 1, 3\}$. 但由列正交性, 我们有

$$4 = 60/15 = |A_2|/k_2 = \sum |\chi_i((1,2)(3,4))|^2 = 1 + 0 + 1 + a^2 + b^2;$$

1. 此得 $a = b = 1$, 从而 $\chi_4((12)(34)) = \chi_5((12)(34)) = 1$. 由上列正交性, 我们又有

$$3 = 60/20 = |A_3|/k_3 = \sum |\chi_i((1,2,3))|^2 \\ = 1 + 1 + 1 + |\chi_4((123))|^2 + |\chi_5((123))|^2,$$

于是 $\chi_4((123)) = \chi_5((123)) = 1$, 从而得 $\chi_4((12345)) = \chi_5((12345)) = 1$. 又有 1 列 A_5 的部分特征标表:

| | 1 | 15 | 20 | 12 | 12 |
|----------|---|----------|-------|---------|---------|
| | 1 | (12)(34) | (123) | (12345) | (13524) |
| χ_1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| χ_2 | 4 | 0 | 1 | -1 | -1 |
| χ_3 | 5 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| χ_4 | 3 | -1 | 0 | | |
| χ_5 | 3 | -1 | 0 | | |

又, 由 $\chi_4((1,2,3,4,5)) = 1$ 而我们能得到 χ_4 在 1 列中其绝对值发现 χ_4 在 1 列中其绝对值, 且有 $\chi_4((1,2,3,4,5)) = 1$, 从而 $\chi_4((1,2,3,4,5)) = 1$. 类似地论证可知, $\chi_4(x^2), \chi_5(x)$ 及 $\chi_5(x^2)$ 也是实数.

令 $c = \chi_4(x), d = \chi_4(x^2)$, 由行正交性, 我们有

$$0 = \sum n_i \chi_i(g_i) = 1 \times 3 + 15 \times (-1) + 20 \times 0 + 12c + 12d$$

由此得 $c + d = 1$. 因为 $\chi_4(x^2)$ 也是实数, 我们又有

$$60 = \sum n_i \chi_i(g_i)^2 = 1 \times 9 + 15 \times 1 + 20 \times 0 + 12c^2 + 12d^2$$

由此又得 $d = 1 - c$, 因而, $c^2 + (1 - c)^2 = 1$. 不失一般性, 我们设

$$c = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ 及 } d = 1 - c = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

类似有

$$\chi_5(x) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \chi_5(x^2) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

这就完全确定了 A_5 的特征标表.

问题 3.8

1. 设 G 双传递地作用在 X 上, 证明 (χ) 的特征标是主特征标与其他不可约特征标的和.

2. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 确定 D_n 的特征标表.

3. 确定 S_5 的特征标表.

设 $\chi \in \text{Irr}(G)$ 是 G 上的特征标, 定义 $\chi(g) \rightarrow \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$, 则

$\overline{\chi}$ 也是 G 的特征标, 且 $\chi = \text{Irr}(G)$ 中任一 χ 且当 $\chi = \text{Irr}(G)$ 时

设 $\chi \in \text{Irr}(G)$, χ 是 G 的一个不可约特征标, $N \subseteq K$, 证明:

(1) 存在 $\psi \in \text{Irr}(G/N)$ 使得对任意的 $g \in G$ 都有 $\chi(g) = \psi(gN)$.

(2) $|G/N| = \sum_{\chi \in K} \chi(1)^2$, 其中 $K = \{\chi \in \text{Irr}(G) \mid N \subseteq (K)_\chi\}$.

§ 3.9 有限群特征标理论的应用

最后, 我们给出有限群特征标理论的初步应用.

Burnside 定理 f_1, f_2, \dots, f_r 两两互素, 其中 f_1, f_2 是不同的素数, r, d 是正整数.

Frobenius 定理 设 G 是有有限群, $H \leq G$, 对 $\forall g \in G$, H 都有 $H \cap H^g = 1$, 则 $N = \{g \in G \mid g \text{ 与 } H \text{ 的任何元素都不共轭}\} = 1$ 是 G 的主因子群, 进一步有 $G = HN$, $N \cap H = 1$.

Frobenius 定理中的群 G 称为 Frobenius 群, H 称为 Frobenius 补, N 称为 Frobenius 核. 设 χ 是 G 的特征标, $H \leq G$, 令 $\chi|_H = \chi$ 是 χ 限制到 H 上得到的函数, 因为 G 的表示限制到 H 上产生一个 H 的表示, 因有 χ 是 H 的一个特征标, 即 $\chi|_H \in \text{Irr}(H)$.

定义 3.9.1 设 $\psi \in \text{Irr}(H)$, $\chi \in \text{Irr}(G)$, 定义 $\psi \subset \chi$ 当且仅当 $\chi|_H = \psi$, 即 $\chi|_H = \psi$.

其中 $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ 满足 $\varphi(H) = 0$, $\varphi(x, h \in H)$ 称为 φ 在 G 上的诱导类函数.

事实上, 若 a 与 b 在 G 中共轭, 设 $b = xax^{-1}$, 则

$$\begin{aligned}\varphi(b) &= \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \varphi(gbg^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \varphi(gx a (gx)^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \varphi(gag^{-1}) = \varphi(a),\end{aligned}$$

这说明 φ 确为 G 的类函数, 即 $\varphi \in \text{Class}(G)$. 显然有 $\varphi = \varphi$, 从而 $\varphi = \varphi$. 又由定义可得 $\varphi(1) = |G:H|\varphi(1)$.

Frobenius 互反律 设 $H = \langle x, y \rangle \leq G$, $H = \langle x, y \rangle$, 则 $(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)$.

证明 直接计算可得

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G||H|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in G} \varphi(xgx^{-1}) \overline{\psi(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \sum_{g \in G} \varphi(xgx^{-1}) \overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \varphi(x) \overline{\psi(x)} = (\varphi, \psi).\end{aligned}$$

推论 3.9.1 设 $H = \langle x, y \rangle$ 为 G 的特征子群, 则 φ 也是 G 的特征子群.

证明 因为 $\varphi = \varphi$, 故 $\varphi(x, y) = \varphi(x, y)$, $\forall x, y \in \text{Irr}(G)$. 由 Frobenius 互反律知, $(\varphi, \chi) = \varphi(x, y)$, 又知 (φ, χ) 是非负整数, 从而 (φ, χ) 也是非负整数. 由定理 3.6.4 得 φ 是 G 的特征标.

引理 3.9.2 设 G 是 Frobenius 群, $H = \langle x, y \rangle$ 是 G 的 Frobenius 补, 若 $\varphi, \psi \in \text{Class}(H)$, $\varphi(1) = 0$, 则 $(\varphi)_H = \varphi$, 且 $(\varphi, \varphi) = (\varphi, \varphi)$.

证明 设 $h \in H$, 我们只须证 $\varphi(h) = \varphi(h)$. 若 $h = 1$, 则 $\varphi(h) = \varphi(h)$, 从而 $\varphi(1) = \varphi(1)$. 不妨设 $h \neq 1$, 则

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi(xhx^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} \varphi(xhx^{-1}) = \varphi(h)\end{aligned}$$

对于第二个结论, 由于 Frobenius 互反律及 (1) 的结论可知,

$$(\varphi, \varphi) = (\varphi, (\varphi)_H) = (\varphi, \varphi)$$

引理 3.9.3 设 G 是 Frobenius 群, $H = \langle x, y \rangle$ 是 G 的 Frobenius 补, $\chi \in \text{Irr}(H)$, $\chi \neq 1$, $\chi \in G$ 且 H 任何元素都不共轭, 则存在 $\chi' \in \text{Irr}(G)$ 使得 $\chi' = \chi$ 且 $\chi' \neq 1$.

证明 若 $\chi \neq 1$ 是 H 的特征标, 则我们取 $\chi' = \chi$. 此时我们有 $\chi' = \chi$ 且 $\chi' \neq 1$. 不妨设 $\chi \neq 1$, 定义 $\chi' = \chi$. 若 $\chi \in \text{Irr}(H)$, 则显然有 $\chi(1) = 1$. 由推论 3.9.1 知, $\varphi \in \text{Class}(G)$, 于是 φ 是 $\text{Irr}(G)$ 中元素的 \mathbb{Z} -线性组合. 又由 Frobenius 互

反律可得 $(\varphi, 1_G) = (\varphi, 1_H) = \chi(1)$.

不妨设 $\varphi = \chi - \lambda$, 其中 $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i$ 是 G 的除了 χ 特征标以外的其它不可约特征标. 由 χ 线性组合上, 此可得 $\varphi = \chi - \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i$.

另一方面, $\varphi, \varphi^* = \varphi^{-1} = \chi - \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i = \chi - \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i^*$. 比较两式, 得 $\chi_i / \chi_i^* = 1$.

设 $\chi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_i$, 其中 $a_i \in \mathbb{Z}$, 则 $\chi_i^* = \chi_i, \chi_i = \sum_{j=1}^n a_j \chi_j^*$. 由此可知, 对某个 $\chi_i \in \text{Irr}(G)$, 我们有 $\chi_i = \sum_{j=1}^n a_j \chi_j$. 由分拆定理, $\chi_i \in \text{Irr}(G)$, 得 $\varphi = \chi_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_j$. 于是 $\chi = \chi(1)1_H$, 由此可得 $(\chi^*)_H = \chi$.

特别地, $\chi(1) = \chi_i$. 这说明 $\chi_i = \sum_{j=1}^n a_j \chi_j$ 且 $\chi_i = \chi_i(1)1_H \in \text{Irr}(G)$.

对于第二个结论, $\chi(g) \in \mathbb{N}$, 由特征标数 $\chi(g), \chi(1)$ 直接计算可得 $\chi^*(g) = \chi(1)$, 于是 $\chi^*(g1) = \chi(1)$, 故 $g \in K_G$.

Frobenius 定理的证明 设 $N = \bigcup_{g \in G} H^g$ 与 H 的任何元素都不共轭, 于是, 即 $N = (G - \bigcup_{g \in G} H^g) \cup \{1\}$.

对 $\forall \chi \in \text{Irr}(H)$, $\chi \in \chi_i \in \text{Irr}(G)$. 于是 $\chi_i = \sum_{j=1}^n a_j \chi_j$. 故对所有的 $\chi_i \in \text{Irr}(H)$, 有 $N \cap K = M \subseteq K$, 其中 K 取遍 $\text{Irr}(H)$ 中所有的 χ_i . 由命题 3.9.3, M 是 $\bigcup_{\chi_i \in \text{Irr}(H)} N \cap H^g$ 的正规子群, 又由命题 3.9.3 知 $\chi_i \in N$, 于是 $M = H \cap K$.

又取 $M \subseteq H \cap K$, $M \subseteq N$. 我们得到 K 中有 $\chi_i \in N$, $M \cap H = \{1\}$, 故 $M = N$, 从而 $N = M$ 是 G 的正规子群.

下面证明 $N \cap H = H$. 由上述 $N = H \cup H^g$, H 有 $\chi_i \in H$ 与 H 个互不相交的共轭子群, 由此得

$$|N| = |G| - \left| \bigcup_{g \in G} (H^g - 1) \right| = |G| - |G:H|(|H|-1) = |G:H|,$$

因为 $N \cap H = 1$, 我们有

$$|NH| = |N||H| = |G:H||H| = |G|, \text{ 故 } G = NH.$$

定义 3.9.1 (Gauss 定理, 高斯定理) 在代数数论中, 概念 $\alpha \in \mathbb{C}$ 称为代数整数, 若存在首项系数为 1 的多项式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 满足

引理 3.9.4 若 α 是子理数或代数整数, 则 α^* 为整数.

证明 设 $\alpha \in \mathbb{C}$ 是代数整数, 且 $\alpha \neq 1$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{n-1} + \cdots + c_1\left(\frac{\alpha}{b}\right) + c_0 = 0$$

用 b^n 乘等式的两边, 我们有 $\alpha^n + m_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + m_1\alpha + m_0$ 与 α^n 互素相矛盾.

引理 3.9.5 设 $\alpha \in \mathbb{C}$, 则 α 是代数整数当且仅当 $\mathbb{Z}[\alpha]$ 是有限生成 \mathbb{Z} -模, 其中 $\mathbb{Z}[\alpha]$ 是整数环 \mathbb{Z} 上关于 α 的多项式环.

证明 设 α 是合的 $\mathbb{Z}[\alpha]$ 中的整系数多项式 $f(x) = \alpha^n + m_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + m_1\alpha + m_0$, 于是 α

a, a^2, \dots, a^n , 故 a^n 以及 a 的更高次幂均可由 $1, a, \dots, a^{n-1}$ 线性表出, 且表式的系数均为整数. 这说明 $1, a, \dots, a^{n-1}$ 是 $\mathbb{Z}[a]$ 的一个生成集, 而 $\mathbb{Z}[a]$ 是有限生成模.

反之, 设 a, a_1, \dots, a_r 是 $\mathbb{Z}[a]$ 的一个生成集, 则对 $\forall x, a$ 是 \mathbb{Z} 线性组合, 即

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} a_j + a_{i0} \in \mathbb{Z}, \text{ 整理得}$$

$$0 = \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \delta_{ij}) a_j, i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 δ 是 Kronecker 符号. 因为上述齐次线性方程组有非零解 a, a_1, \dots, a_r , 故系数矩阵的行列式必为零. 故 n 最多. 式 (3.9.5) 为 f 的根.

因为 n 个多项式的系数可能为 ± 1 , 于是当变换, 可使它的非地系数为 ± 1 , 即 f 为代数整数.

定理 3.9.6 所有的代数整数关于数的加法和乘法构成一个环.

证明 设 α, β 是代数整数, 由定理 3.9.5 知, $\mathbb{Z}[\alpha], \mathbb{Z}[\beta]$ 是有限生成模. 设 $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta, \beta_1, \dots, \beta_s$ 分别为 $\mathbb{Z}[\alpha]$ 与 $\mathbb{Z}[\beta]$ 的生成集, 计算可知 $\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{Z}[\alpha, \beta] = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ 的一个生成集, 且 $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ 是有限生成模. 因为 \mathbb{Z} 是主理想环, 又 $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ 与 $\mathbb{Z}[\alpha]$ 都是 $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ 的子模, 故 $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ 与 $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ 都是有限生成模, 且 $\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ 都是代数整数, 从而所有代数整数构成一个环.

代数整数与有限群表示论的联系体现在以下基本事实中.

引理 3.9.7 设 $\chi \in \mathbb{C}^G$ 的一个特征标, 则对 $\forall g \in G, \chi(g) \in \mathbb{Z}$ 是代数整数.

证明 设 $\lambda = \chi(g)$, 则 $\chi(g)$ 是 χ 单 g 根的和, 而单 g 根是代数整数, 由定理 3.9.6 得 $\chi(g)$ 是代数整数.

引理 3.9.8 设 $\chi \in \text{Irr}(G)$, $\lambda \in G$, 则 $\chi(\lambda) = \chi(\lambda^{-1}) \chi(1)$ 是代数整数.

证明 设 $\lambda \in \mathbb{C}^G$ 单 G 模, 则 λ 的特征标 $\chi \in \mathbb{C}^G$. 令 $\lambda \in \mathbb{C}^G$, K 是 λ 所在的最小域, $\alpha \in \mathbb{C}^G, \beta \in \mathbb{C}^G$ 考虑 λ 到 \mathbb{C}^G 的映射 $\psi: \alpha \mapsto \alpha\lambda, \beta \mapsto \beta\lambda$. 由定理 3.9.7 知, 对 $\alpha \in \mathbb{C}^G$ 中 λ 中, $\alpha\lambda$ 得 $\psi: \mathbb{C}^G \rightarrow \mathbb{C}^G$, 由 Schur 定理知, 存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得对所有的 $\alpha \in \mathbb{C}^G$ 都有 $\alpha\lambda = \lambda\alpha$, 计算迹我们有

$$\lambda \chi(1) = \sum_{s \in G} \chi(x) = |K| \chi(g) = |G : C_G(g)| \chi(G),$$

因而

$$\lambda = |G : C_G(g)| \chi(g) / \chi(1).$$

考虑 \mathbb{C}^G 中 \mathbb{C}^G 的映射 $\sigma: \alpha \mapsto \alpha\sigma, \alpha \in \mathbb{C}^G$. 由引理 3.9.7 知, $\sigma \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^G)$, 因为 λ 是单 G 模, 则 \mathbb{C}^G 看作是 \mathbb{C}^G 模的子模, 又 λ 在 \mathbb{C}^G 的中心里, 故对任意的 $\alpha \in \mathbb{C}^G \subset \mathbb{C}^G$, 我们有 $\sigma(\alpha) = \alpha\sigma = \alpha\lambda = \lambda\alpha$, 这说明 $\lambda\sigma$ 的特征值.

于是若令 λ 是 χ 对于 (1) 上的向量空间 (V) 在基 (1) 下的特征, 则我们有 $\lambda(\chi + 1) = 0$.

另一方面, (1) 是素数 p 或 p^2 , 因此由 $\chi(x) = \chi(x^p) = \chi(x^{p^2}) = 1$ 是系数在 \mathbb{Z} 中的自同奇数方的关于 χ 的多项式, 则无 $\chi(x) = 1$, 故 λ 是代数整数.

引理 3.9.9 设 $\chi \in \text{Irr}(G)$, 则 $\chi(1) \mid |G|$.

证明 以 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 χ 对于 (1) 上的特征, 由引理 3.9.8 及定理 3.9.7, 可知 $\forall i, \chi(x) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, 且 λ_i 是代数整数. 由引理 3.9.9,

$$\begin{aligned} \frac{G_i}{\chi(1)} &= \frac{1}{\chi(1)} \sum_i |G_i C_G(g_i)| \chi(g_i) \overline{\chi(g_i)} \\ &= \sum_i (|G_i C_G(g_i)| \chi(g_i) / \chi(1) \cdot \overline{\chi(g_i)}), \end{aligned}$$

由定理 3.9.8, 它是代数整数, 又 $\chi(1) \mid |G|$, 所以 $\chi(1) \mid G_i$, 结论.

引理 3.9.10 设 $\chi \in \text{Irr}(G)$ 是 p -阶素数 p 的共轭类 χ , $\chi(1) \equiv 1 \pmod{p}$, 对 $\chi \in \text{Irr}(G)$, 令 $a = \chi(g) / \chi(1)$, 则 $a = 0$ 或 $|a| = 1$.

证明 有 $\chi(x) \in \mathbb{Z}$ 使得 $\chi(x) = \chi(1) \cdot a$, 于是 $\chi(x) = \chi(x^p) = \chi(x^{p^2}) = \chi(x)$, 用 $\chi(1)$ 除上式的两边, 由引理 3.9.7 和 3.9.8 可知:

$$\chi(g) \text{ 和 } \frac{|K| \chi(g)}{\chi(1)} \text{ 均为代数整数,}$$

因而 $\frac{\chi(g)}{\chi(1)}$ 也是代数整数.

令 $\chi(1) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n$ 是 $\chi(1)$ 在 \mathbb{Q} 上极小多项式的所有正根, 由定理 3.9.10,

可知 $\chi(\alpha_i) = \sum_j \alpha_j$, 各正根的积, 且 $\alpha_i \mid \chi(1)$, 于是 $\alpha_i \mid \chi(\alpha_i)$, 于是

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\chi(1)},$$

从而每个 α_i 都满足方程 $\frac{f(x)}{\chi(1)}$, 这样一些根的积 $\chi(1)$ 与 $\chi(1) \mid \chi(1)$ 来说, α_i

满足 $\left\{ \left| \alpha_i \right|, \alpha_i \in \mathbb{Q} \right\}$ 是代数整数, α_i 满足 α_i 是适合的 \mathbb{Q} 上极小多项式,

故 $\alpha_i = \pm 1$ 或 $\alpha_i = 0$, 且 $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, 故 $\alpha_i = 0$ 或 $\alpha_i = \pm 1$, 故 $\alpha_i = 0$ 或 $\alpha_i = \pm 1$, 因为所有的

λ 是共轭的, 从而 $a = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \chi(g) = 0$.

另一方面, $a = \pm 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$, 对 $\forall i$, 于是有 $a = 0$ 或 $|a| = 1$.

定理 3.9.11 若有有限群 G 有一个非平凡 p -元素 α 是素数的平方幂, 则 G 不是单

群.

证明 设 ρ 是单群, $1 \neq \chi = \rho$ 所在的其他类 K 的元素个数 f , f 是素数, $\rho \in \mathbb{N}$, 亦即 $\rho = \chi + (f-1)\chi(1)\rho$, 此时, 由交换性定理和主定理我们有

$$0 = \frac{1}{f} \sum_g \chi(g) \rho(g) = \frac{1}{f} + \sum_K \frac{\chi(g) \chi(1)}{f}.$$

其中, χ, χ, \dots, χ 是 ρ 的不可约特征标, 由定理 3.9(3)知, f 不是代数整数. 于是由定理 3.9 知, 对某 $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\chi - \lambda \chi(1)\rho$ 不是代数整数, 因为 χ, ρ 是代数整数, 这说明 f 不整除 $\lambda + (f-1)\chi(1)\rho = \chi - \lambda \chi(1)\rho$, 于是存在 $a, b \in \mathbb{Z}$ 使得 $a + b\chi(1) = 1$, 因而

$$\chi(g)/\chi(1) = a|G|C_G(g)^{-1}\chi(g)/\chi(1) + b\chi(g),$$

由定理 3.9 和 3.9(3)知, 这是一个代数整数, $\chi/\chi(1) \in \mathbb{Z}$, 由此得

$$g \in \mathbb{Z}_\chi = \{x \in G \mid \chi(x) = \chi(1)\}.$$

但 $\mathbb{Z}_\chi = 1$, 矛盾, 故结论成立.

Burnside 定理的证明 设 G 是使定理成立的极小反例, 姑 G 为单群, 否则 G 有非平凡正规子群 N , 由 G 为极小群, N 为 G 的真子群, 从而 N 可解. 令 $f \in \mathbb{N}$, $\rho \in G$, $1 \neq \rho = \chi + (f-1)\chi(1)\rho$, 由 3.9(3)知, f 是素数, 由 3.9(1)知, f 不整除 $\lambda + (f-1)\chi(1)\rho = \chi - \lambda \chi(1)\rho$, 矛盾, 故结论成立.

问题 3.9

1. 若 $H \leq G$, ψ 是 H 的特征标, 证明: $Z(\psi^G) \leq H$.
2. 若 $H, K \leq G$ 且 $G = HK$, $\varphi \in cf(H)$, 证明: $(\varphi^G)_K = (\Phi_{H \cap K})$.
3. 若 $H \leq G$, $|G:H| = n$, χ 是 G 的一个特征标, 证明:
 - (1) $\langle \chi, \chi \rangle \geq \langle \chi_H, \chi_H \rangle / n$;
 - (2) 若 H 是交换群, $\chi \in \text{Irr}(G)$, 则 $\chi(1) \leq n$;
 - (3) 若 (2) 中的等式成立, 则 $H < G$.

若 G 为奇阶群, 是组为 p 数阶子群, H 是交换群, $\chi \in \text{Irr}(G)$, $\chi(1) = n$, 若 G 为奇阶群, 证明: 值为 p 数的不可约特征标只能是主特征标.

§ 3.10 有限群的不等价不可约表示

在本节以实例演示有限群不等价不可约表示的寻找方法. 首先根据上一节所教基本原理, 构造群的特征标表, 进而确定群的不等价不可约表示及其维数, 再根据群的具体含义以确定每个表示的具体形式.

试以 C_{10} 群为例说明之.

1. 确定群的不等价不可约表示的维数

确定群的不等价不可约表示的维数, 就是确定群的全部不可约表示的个数. 以 C_{10} 群 $C_{10} = \{E, C_1^1, C_1^2, C_1^3, m_X, m_Y, \sigma_a, \sigma_b\}$ 可分为 5 类, 即 $K = 5$,

$$e_1 = \{E\}, e_2 = \{C_1^1, C_1^5\}, e_3 = \{C_1^2, C_1^4\}, e_4 = \{m_X, m_Y\}, e_5 = \{\sigma_a, \sigma_b\}.$$

由此可见群 C_{10} 有 5 个不等价不可约表示.

由伯尔斯坦定理 $\sum_{i=1}^K l_i^2 = g$, 或在 $g = 10$ 时, 求得整数解 $l_1 =$

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1 \text{ (一维)}, l_5 = 2 \text{ (二维)}.$$

例 3 10.1 设 C_2 与 C_3 元素构成群 C_6 , 求其全部不可约表示的个数及相应维数.

解 C_6 有 6 个元素 $E, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, 由伯尔斯坦定理 $\sum_{i=1}^K l_i^2 = g = 6$, 求得 $l_1 = l_2 = l_3 = 1$, 即全部为一维表示.

2. 构造特征标表

一般可以利用如下关系:

(1) 任何群的不等价不可约表示 $i: \chi_i(E) = l_i$.

(2) 若 $l_i = 1$, 则存在一维表示 $\chi_i(g) = \omega_i$, $\omega_i^n = 1$, $\omega_i \neq 1$.

(3) 二维表示, 或高维表示, 其表示关系由下列约化关系给出:

(4) 对于一维表示, 若 $g_a^n = E$, 则 $\chi^{(1)}(g_a) \frac{1}{n} = e^{2\pi i k/n}$.

(5) 两个特征标正交关系.

(6) 不可约判据 $\sum_i n_i |\chi_i|^2 = g$.

例 3 10.2 求循环群 $C_n = \{E, C, C^2, \dots, C^{n-1}\}$ 的特征标表. 它是阿贝尔群, $nK = g, l_1 = l_2 = \dots = l_n = 1$ 全部是一维表示.

由于 $a^n = E$, 故 $\Gamma(E) = \Gamma(a^n) = 1$, 即 $[\Gamma(a)]^n = 1$, 就是

$$\Gamma(a) = 1^{\frac{1}{n}} = e^{2\pi i k/n} (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

这样得到 n 个不同的表示:

令

$$\Gamma^{(p)}(a) = e^{2\pi i (p-1)k/n} (p = 1, \dots, n),$$

共轭类

$$e_1 = \{E\}, e_2 = \{a\}, \dots, e_n = \{a^{n-1}\}.$$

对于 $\chi \in e_m$, 应有

$$\Gamma^{(p)}(\chi) = \Gamma^{(p)}(a^{m-1}) = [\Gamma^{(p)}(a)]^{m-1} = [e^{2\pi i/n}]^{(p-1)(m-1)}$$

其中 p 为不可约表示序数, m 为其轨道的个数. 其特征标 $\chi = 0$ 等于此数, $\chi = [e^{2\pi i/n}]^{(p-1)(m-1)}$, 此群的特征标表如表 3.1 (令 $n=5$) 所示.

表 3.1 循环群 $G = \{E, a, \dots, a^{n-1}, a^n = E\}$ 特征标表

| 类元素 m | e_1 | e_2 | e_3 | e_4 | e_5 |
|----------------|-------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 不可约表示 ρ | (E) | (a) | (a^2) | (a^3) | (a^4) |
| $\chi_1^{(m)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2^{(m)}$ | 1 | $e^{2\pi i/5}$ | $e^{4\pi i/5}$ | $e^{6\pi i/5}$ | $e^{8\pi i/5}$ |
| $\chi_3^{(m)}$ | 1 | $e^{4\pi i/5}$ | $e^{8\pi i/5}$ | $e^{12\pi i/5}$ | $e^{16\pi i/5}$ |
| $\chi_4^{(m)}$ | 1 | $e^{6\pi i/5}$ | $e^{12\pi i/5}$ | $e^{18\pi i/5}$ | $e^{24\pi i/5}$ |
| $\chi_5^{(m)}$ | 1 | $e^{8\pi i/5}$ | $e^{16\pi i/5}$ | $e^{24\pi i/5}$ | $e^{48\pi i/5}$ |

例 3.10.3 构造 C_n 群的特征标表.

C_n 群的特征标表如表 3.2 所示.

表 3.2 C_n 群的特征标表

| 类脚标 k | e_1 | e_2 | e_3 | e_4 | e_5 |
|----------------|---------|--------------------|-------------|----------------|--------------------------|
| 表示脚标 i | $\{E\}$ | $\{C_2^1, C_2^2\}$ | $\{C_3^1\}$ | $\{m_1, m_2\}$ | $\{\sigma_n, \sigma_n\}$ |
| χ^1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| χ^2 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| $\chi_3^{(4)}$ | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| $\chi_4^{(4)}$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_5^{(4)}$ | 2 | 0 | -2 | 0 | 0 |

演算过程如下:

(1) 考虑第一列, I 和恒等表示, χ_1, χ_2 表示 $\{C_2^1, C_2^2\}$, χ_3, χ_4 表示 $\{C_3^1\}$, χ_5 表示 $\{m_1, m_2\}$.

(2) 考虑第三列, $I_3 = \{C_3^1\}$. 由于 $[C_3^1]^3 = E$, 由例 3.10.2 得

$$\chi_3^{(3)}(C_3^1) = \pm 1, \chi_4^{(3)}(C_3^1) = \pm 1, \chi_5^{(3)}(C_3^1) = \pm 1.$$

但由 $\chi^{(2)}(C_3^1) = \chi^{(2)}(C_3^2) = [\chi^{(2)}(C_3^1)]^2$ (第二列) 可知

$$[\chi^{(2)}(C_3^1)]^2 = 1 = [\chi^{(2)}(C_3^1)]^3 \pm 1.$$

即 $\chi^{(2)}(C_3^1) = 1, \chi^{(2)} = \pm 1$;

(3) 由特征标第一正交定理得 $\sum_i \chi_i^2 = \frac{n}{h} C_1$, 令 $h = 1/2$ 则 $\sum_i \chi_i^2 = 2$ (类),

注意 $n_1 = 1, n_2 = 2$, 可得 $\chi_5^{(2)} = -2$;

(4) 对于 χ_5 , 由不可约表示依据 $\sum_i n_i \chi_i^2 = \frac{n}{h} C_1$ 类, $n_1 = 1, n_2 = 2$, 注意到 $n_1 = 1, n_2 = 2$,

变换算符,找到相应变换的不变函数 $\chi(g)$,从而得到其忠实表示.在 G 群中将详细讨论之.

(2) 抽象群:先找到其忠实表示,然后利用1.1中对称群中应用的方法.

例 3.10.5 求 C_n 群不等价不可约表示的具体形式.

建立坐标系,设 $\forall g_n \in C_n, g_n$ 为二维空间的变换:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

当 $n=1$ 时, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,显然, $\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

当 $n=2$ 时, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$, $\Gamma^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Gamma^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

以此类推,得 $\Gamma^7 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Gamma^9 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

其余元素可以仿此进行.由于 C_n 群为 n 维表示,也就是说, C_n 群的全部不等价不可约表示都已找到,分别是

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \Gamma^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$m_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 3.10.6 对称群 S_3 的不可约表示.对称群 S_3 为 3 阶群,对称群定义与对于集合 $\{x, y, z\}$,有 $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ (循环)或 $x \rightarrow x, y \rightarrow y, z \rightarrow z$ (恒等).

证明 对于 G 的任意表示

$$\Gamma(g_s) = \Gamma(g^{-1}g_s^{-1}g) = \Gamma(g^{-1})\Gamma(g_s^{-1})\Gamma(g),$$

因而

$$\chi(g_s) = \text{Tr}[\Gamma(g^{-1})\Gamma(g_s^{-1})\Gamma(g)] = \text{Tr}[\Gamma(g_s^{-1})] = \chi(g_s^{-1}),$$

但是 $\chi(g_s^{-1}) = \chi(g_s)^*$,故 $\chi(g_s) = \chi(g_s)^*$.

而对称群 S_3, S_4 是单群,循环群 S_2, S_3, S_4 是非单群群 S_5 为例.

问题 3.10

1. 用正则表示寻找 C_n 群的全部不等价不可约表示.

2. 四元素集合 $\bar{Q} = \{1, i, j, k, 1, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, 其中

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k(i, j, k \text{ 循环}), 1 = -1, \bar{i} = -i, \bar{j} = -j, \bar{k} = -k,$$

乘法 $\bar{i}i = \bar{j}j = \bar{k}k = 1, \bar{i}i = \bar{k}$ 等.证明 \bar{Q} 构成一个群.

(1) 给出 \bar{Q} 群的乘法表:

$$- [\Gamma^{(a)}(g_1 g_2)] \otimes [\Gamma^{(b)}(g_1 g_2)] - \Gamma^{(a)}(g_1 g_2).$$

例 3.11.1 设系统由量子系统构成, 两子系统 ψ 可相互作用, 忽略去, 让它们有共同的对称群 G , 两者能量本征函数, 构成直积的不变子空间 $L^{(a)} \otimes L^{(b)}$. 这些本征函数各自按群 G 的特征不可约表示 $\Gamma^{(a)} = \Gamma^{(a)}_j, \Gamma^{(b)} = \Gamma^{(b)}_k$ 变换, 即

$$P_a \Psi^{(a)}_j(x) = \Psi^{(a)}_j(g_a^{-1}x) = \sum_k \Psi^{(a)}_k(x) \Gamma^{(a)}_{kj}(g_a)_{jk},$$

$$P_b \Phi^{(b)}_k(x) = \Phi^{(b)}_k(g_b^{-1}x) = \sum_l \Phi^{(b)}_l(x) \Gamma^{(b)}_{lk}(g_b)_{kl}.$$

且 $\Psi^{(a)}_j \in \Psi^{(a)}_j, \Psi^{(b)}_k \in \Psi^{(b)}_k, \forall \Phi^{(b)}_k \in \Psi^{(b)}_k, \dots, \Psi^{(a)}_j \in \Psi^{(a)}_j, \dots, \Psi^{(b)}_k \in \Psi^{(b)}_k$, 则直积的总波函数 $\Psi = \Psi^{(a)}_j \Psi^{(b)}_k$ 满足有 $n = n_1 + n_2$

$$\begin{aligned} P_{ab} \Psi^{(ab)}_{jk} &= \Psi^{(ab)}_{jk}(g_{ab}^{-1}x) \\ &= \sum_{lm} \Psi^{(a)}_l(x) \Phi^{(b)}_m(x) \Gamma^{(a)}_{lj}(g_a)_{jk} \Gamma^{(b)}_{mk}(g_b)_{kl} \\ &= \sum_{lm} \Psi^{(ab)}_{lm} \cdot [\Gamma^{(a)}(g_a) \otimes \Gamma^{(b)}(g_b)]_{lm, jk}, \end{aligned}$$

其中 $\Gamma^{(a)} = \Gamma^{(a)}_{jk}, \Gamma^{(b)} = \Gamma^{(b)}_{kl}, \Gamma^{(ab)} = \Gamma^{(ab)}_{lm}$ 表示 $\Gamma^{(a)} = \Gamma^{(a)}_j, \Gamma^{(b)} = \Gamma^{(b)}_k$ 为直积表示的特征标. 如果把 $\Psi^{(a)}_j, \Psi^{(b)}_k$ 分别视为线性 n_1, n_2 的基, 则 $\Psi^{(ab)}_{jk}$ 的生成元 L_1 和 L_2 可 $L = L_{n_1} \otimes L_{n_2}$.

系按 G 的波函数 $\Psi^{(ab)}_{jk}$ 按群 G 的表示 $\Gamma^{(a)} = \Gamma^{(a)}_j, \Gamma^{(b)} = \Gamma^{(b)}_k$ 为直积表示 $\Gamma^{(ab)}$ 变换. 直积表示的特性标有重要性质:

$$\text{Tr}[\Gamma(g_a)] = \text{Tr}[\Gamma^{(a)}(g_a)] \cdot \text{Tr}[\Gamma^{(b)}(g_a)],$$

$$\text{或 } \chi(g_a) = \chi^{(a)}(g_a) \chi^{(b)}(g_a), \quad \forall g_a \in G.$$

2. 直积表示的约化

设直积表示 $\Gamma^{(ab)}$ 可约, 约化为 $\Gamma^{(ab)} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \Gamma^{(\alpha)}, \forall g_a \in G$, 则有

$$m_{\alpha} = \frac{1}{|G|} \sum_{g_a \in G} \chi^{(\alpha)}(g_a) \chi^{(ab)}(g_a) = \frac{1}{|G|} \sum_{g_a \in G} \chi^{(\alpha)}(g_a) \chi^{(a)}(g_a) \chi^{(b)}(g_a).$$

例 3.11.2 设 C_n 群的二维表示为 $\Gamma^{(12)}$, 则

$$\Gamma^{(12)} \otimes \Gamma^{(12)} = \Gamma^{(11)} \otimes \Gamma^{(22)} \otimes \Gamma^{(22)} \otimes \Gamma^{(44)}.$$

在量子力学上, 两个不可约表示正交和正约化, 通常称为对称群 (对称表示) 与反对称群 (反对称表示), 系数 (相位) 的相似变换 (表示表示) 化 (矩阵元素) 的 C 系数, 所用的系数已制成 C 系数表, 查阅十分方便.

3. 群的直积表示

设群 G 为群 H 与 K 上构成的直积群 $G = H \times K$. 现讨论 G 的表示 Γ 与 H 的表

示有什么关系.

设 $\forall H_m \in H(m = 1, 2, \dots, k), \forall K_s \in K(s = 1, \dots, l)$, 则 $\forall G_{ms} \in G$ 有

$$G_{ms} = H_m K_s. \text{ 令 } H_m K_s = H_s, K_s K_\beta = K_\gamma,$$

则有

$$G_{ms} G_{\alpha\beta} = (H_m, K_s)(H_\alpha, K_\beta) = (H_s, K_\gamma) = G_{\alpha\beta} \in G.$$

设 $\{\Gamma^{(p)}(H_m)\}$ 与 $\{\Gamma^{(q)}(K_s)\}$ 为群 H 与 K 的两个表示, 则

$$\Gamma^{(p)}(H_m)\Gamma^{(p)}(H_\alpha) = \Gamma^{(p)}(H_s), \Gamma^{(q)}(K_s)\Gamma^{(q)}(K_\beta) = \Gamma^{(q)}(K_\gamma).$$

相应的直积^[1], 并用到上节证明的矩阵乘法公式,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(p)}(H) \otimes \Gamma^{(q)}(K) &= \Gamma^{(p)}(H) \Gamma^{(q)}(H) \otimes \Gamma^{(q)}(K) \Gamma^{(q)}(K) \\ &= [\Gamma^{(p)}(H_m) \otimes \Gamma^{(q)}(K_s)][\Gamma^{(p)}(H_\alpha) \otimes \Gamma^{(q)}(K_\beta)], \end{aligned}$$

令 $\Gamma^{(pq)}(G_{\alpha\beta}) = \Gamma^{(p)}(H_s) \otimes \Gamma^{(q)}(K_\gamma)$, 则上式变为

$$\Gamma^{(pq)}(G_{\alpha\beta}) = \Gamma^{(pq)}(G_{ms})\Gamma^{(pq)}(G_{\alpha\beta}),$$

其中 $G_{ms}, G_{\alpha\beta} \in G, G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}^{-1}, G_{\alpha\beta} \in G, \det \Gamma^{(pq)} = 1$, 已构成群的一个表示. 换言之, 用群 H 与群 K 表示的直积, 提供了直积群的表示. 因此, 直积群的所有表示都可以用这种方法提供.

还有讨论直积群的等价不可约表示. 设 $\Gamma^{(p)} = \Gamma^{(p)}(H)$ 与 $\Gamma^{(q)} = \Gamma^{(q)}(K)$ 为群 H 与 K 的两个不可约表示, 且当群 $\Gamma^{(p)}$ 与群 $\Gamma^{(q)}$ 的表示 χ_p, χ_q 已出特征标

$$\chi_{pq}(G_{\alpha\beta}) = \chi_p(H_s)\chi_q(K_\gamma),$$

其中 $\chi^{(p)}(H_s)$ 与 $\chi^{(q)}(K_\gamma)$ 应满足不可约判据,

$$\sum_{H_m \in H} \chi_p(H_m)\chi_p^*(H_m) = h, \sum_{K_s \in K} \chi_q(K_s)\chi_q^*(K_s) = k.$$

上面两式的两边分别相乘, 得

$$\begin{aligned} hk &= g(G \text{ 的阶}) = \sum_{G_{\alpha\beta} \in G} [\chi_p(H_m)\chi_q(K_s)][\chi_p(H_m)\chi_q(K_s)]^* \\ &= \sum_{G_{\alpha\beta} \in G} \chi_p(H_m)\chi_q(K_s)\chi_p^*(H_m)\chi_q^*(K_s) \end{aligned}$$

由此可见, $\Gamma^{(pq)} = \Gamma^{(pq)}(G)$ 构成群的不等价表示. 亦即, 若 $\Gamma^{(p)} = \Gamma^{(p)}(H)$ 与 $\Gamma^{(q)} = \Gamma^{(q)}(K)$ 为群 H 与 K 的不可约表示, 则 $\Gamma^{(pq)}$ 构成直积群的不可约表示. 事实上用这种方法可以构成群 G 的全部不等价不可约表示.

由伯恩塞德定理, 对于 $\{\Gamma^{(p)}\}$ 与 $\{\Gamma^{(q)}\}$, 有

$$\sum_{i=1}^{i_h} l_{(ij)}^p = h, \sum_{j=1}^{i_k} l_{(ij)}^q = k.$$

相乘得

$$hk - g = \sum_{i=1}^{g_k} \sum_{j=1}^{g_l} [I_i I_j]^2,$$

其中 $II = 1$, 就是群 G 的一个表示的维数 $\alpha = 1$, 分别 g_l 为群 H 与群 K 的全部不等价不可约表示的个数, 上式可改写为

$$\sum I_{ij}^2 = g.$$

由伯恩斯坦定理可知, 左边求和遍及所有群 G 的不等价不可约表示.

推论 3.11.1 直积群的全部共轭类数, 等于 H 与 K 的共轭类数的乘积, 即,

$$C_{HK} = C_H \cdot C_K.$$

用群 H 与 K 的表示直积的方法, 虽然不能构造群 G 的全部表示, 但是对群 H 与 K 的所有不等价不可约表示构成的直积表示, 则可提供全部不等价不可约表示.

例 3.11.3 Γ 矩阵群.

N 个矩阵满足对易关系 $X_i Y_j = Y_j X_i + i \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, 由 X_i 取所有可能连乘的集合构成 Γ 矩阵群.

Y_μ 矩阵性质:

$$Y_\mu Y_\nu = Y_\nu Y_\mu + i \delta_{\mu\nu}.$$

对该群取一个忠实的自我不可约么正表示:

$$Y_\mu^* = Y_\mu^{-1} = Y_\mu.$$

令 $X = X_1 X_2 \cdots X_N$, $Y = Y_1 Y_2 \cdots Y_N$, X, Y 为奇数时, $Y = X$, $Y = -X$ 当 N 为偶数时, $Y = -X$, $\mu = 1, 2, \dots, N$

对易, 因此由舒尔引理, Y_μ 应为常数矩阵, 即有

$$Y_\mu = \begin{cases} \pm E, & N = 4n + 1, \\ \pm iE, & N = 4n - 1. \end{cases} \quad (\text{不是新元素})$$

当 $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ 时, 两个矩阵群同构, 当 $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ 时, 生成元为 X_1, X_2, \dots, X_N 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_N . 因此, $\Gamma(4n+1) = \Gamma(4n-1) = E, E, \dots, I$. 只需讨论 $N = 2n$ 的偶数 Γ 矩阵群. Γ 矩阵群 Γ 是异常群 $\forall \mu \in \Gamma, \mu \in \Gamma$, 设所有“+”与“-”构成集合 Γ , 其元素个数 2^n . 集合 Γ 的元素, 即从 N 个 Y 矩阵中取 m 个不同 Y 矩阵 ($m = 1, 2, \dots, N$) 乘积的数目应为

$$g/2 = C_N^0 + C_N^1 + C_N^2 + \cdots + C_N^N + \cdots + C_N^N = 2^N,$$

故群的阶

$$g = 2^{N+1} (N = 2n).$$

显然, 其特征标在自身表示中,

$$\chi(g_\alpha) = \begin{cases} \pm d & g_\alpha = \pm I, \\ 0, & g_\alpha \neq \pm I. \end{cases}$$

由不可约判别法

$$I = \frac{1}{g} \sum_{g_s \in G} |\chi(g_s)|^2 = \frac{2d^2}{2^{N+1}}.$$

故在最低维表示中的维数 $d = 2^{N/2}, N = 2n$.

此外,

$$\det \gamma_\mu = (-1)^{d/2} (\text{当 } N \geq 4 \text{ 时}, \det \gamma_\mu = 1).$$

由于 $\forall \lambda \in I^*$, 有 $I \cap I^\perp \lambda = \{0\}$, 故有 λ 构成互各线性无关的 I 子空间, 如果线性相关, $\sum_{\lambda \in I} c_\lambda \lambda = 0$, 系数 c_λ 不全为零, 由 $\lambda \in I^*$ 右乘此式, 得到 $\sum_{\lambda \in I} c_\lambda \lambda = 0$ (或仿此可证全部 $c_\lambda = 0, \forall \lambda \in I^*$). 故任何 $d \times d$ 矩阵 M 均可按 λ 展开,

$$M = \sum_{\lambda \in I} C(g_\lambda) \cdot g_\lambda, C(g_\lambda) = \frac{1}{d} \text{Tr}(g_\lambda^{-1} M).$$

般说来, 当 $N = 2n$ 时, 除一维表示外, I 取两群只有一个 d 维表示. 当 $N = 2n+1$ 时, 有两个不等价的不可约的 d 维表示. 进一步, 两个等价的 d 维不可约表示 λ 取为 λ , 由 λ 上确定到 d 函数 (如限制群 H 变换后仍可按 I 上 d 维系数取, $\chi_\lambda = \chi_{\pi(m)\lambda}$), 其中 $1 \leq m \leq d$.

γ_n 矩阵群的具体形式 (自身表示):

(i) $N = 2$, 可取泡利矩阵和单位矩阵,

$$\gamma_1 = \sigma_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2, \quad \gamma_3 = -i\gamma_1\gamma_2 = \sigma_3, \quad I =$$

(ii) $N = 2$ (狄拉克矩阵),

$$\gamma_1 = \sigma_1 \times \sigma_1, \gamma_2 = \sigma_2 \times \sigma_2, \gamma_3 = \sigma_1 \times I, \gamma_4 = \sigma_2 \times \sigma_3, \gamma_5 = \sigma_3 \times I = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4,$$

I^* 取 γ 群在旋量分析、量子场论、高能核子物理的分立对称 (电荷共轭 C) 群中有广泛应用.

Burnside 小传

伯恩赛德 (W. Burnside), 英国数学家, 1857 年 11 月 14 日生于伦敦. 1878 年入剑桥圣约翰学院学习, 1880 年转入彭布罗克学院. 1881—1882 年任研究员, 1883 年起任格林尼治皇家海军学院数学教授, 直至去世. 1886 年当选为皇家学会会员, 1893—1898 年任伦敦数学会会长. 初期主要研究应用数学, 以后逐渐转向函数论及微分几何等. 1897 年研究群论, 是群表示论的奠基人之一. 1904 年发表关于论 p - q 群群层与阶 (1907, q 为素数). 1907 年获伦敦数学会德·摩根奖. 他关于群论 (1897) 是有限群论的第一部系统著作, 深刻影响其后的群论体系. 1904 年 4 月, Burnside 提出了一个著名的猜想: 一个奇数阶群 G 必存在一个正规子群列:

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{e\},$$

使得每个 G_i 是交换群. 这一猜想对有限单群分类问题的研究起了重大作用, 多年后, 猜想最终被费特 (W. Feit) 和汤普森 (G. Thompson) 在一篇长达 200 页的论文 (1963 年) 中 Burnside 的乃一重要猜也是关于群 P 的. 1991 年, 柴尔曼诺夫 (E. I. Zelmanov) 在这一猜想方面的工作可获得菲尔兹奖.

Burnside 1927 年 8 月 21 日卒于西威克姆.

问题 3.11

1. 试证: 在 Γ 矩阵群中, 有关系式 $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$, 式中 $\langle X, Y \rangle = XY \cdots Y$.

2. 试证: $N = 4n$ 与 $N = 4n + 1$ 的两 Γ 矩阵群同构.

证: (1) 由 $\langle X, Y \rangle = XY \cdots Y$, 满足交换律易知 $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle = I$. (2) $\{X_1, \dots, X_N\}$ 与 $\{Y_1, \dots, Y_N\}$ 为两组 N 维不可约表示, $X_i = X_j$ 与 $Y_i = Y_j$ 等价, $X_i = X_j$ 与 $Y_i = Y_j$ 等价, 其中 X_i 为 $d_i \times d_i$ 矩阵, 故 $\langle X_i, X_j \rangle = \langle Y_i, Y_j \rangle$ 且特征值相同. 注意到 $\langle X_i, X_j \rangle$ 与 $\langle Y_i, Y_j \rangle$ 本征值为 ± 1 , 且成对出现, 否则不会为零, 故 $\langle X_i, X_j \rangle = \langle Y_i, Y_j \rangle = \pm 1$, $\gamma_p = \pm I$.

(3) 证明: 两群同构. $\langle X_i, X_j \rangle = \langle Y_i, Y_j \rangle = \pm 1$, $\sigma_i = \sigma_j$ 且 $\langle X_i, X_j \rangle$ 与 $\langle Y_i, Y_j \rangle$ 为绕 X_i 轴转动 180° , σ_i 与 σ_j 相同. 在一个平面内, X_i 与 X_j 相互垂直, X_i 与 X_j 的积为 X_k , $X_k = X_l$, $X_k = X_l$, $X_k = X_l$ 且 $X_k = X_l$ 为绕 X_k 轴转动 180° . 由 $X_k = X_l$ 的不等价性, X_k 表示构造群 G 的全部不等价不可约表示.

第4章 物理学中的对称群

本章介绍群的对称性在晶体物理及量子力学中的应用,主要涉及有限群论,同时,还比较详细地介绍群论与点群(主要涉及 $SO(3)$ 群)对对称群的初步应用,但足以证明,群的对称性在自然科学与工程技术中有无限广阔的应用。

§ 4.1 Wigner-Eckart 定理

我们讨论定态波函数按对称群分类

$$P_g \Phi_\mu(x) = \Phi_\mu(g^{-1}x) = \sum_{\lambda=1}^n \Phi_\lambda(x) \Gamma(g_\mu)_{\lambda\mu},$$

式中 m 个本征函数 $\Phi = (\Phi_1(x), \cdots, \Phi_m(x))$, 由 m 个值,称为 m 重简并 $\Gamma(g_\mu)$, 称为群 G 的表示 $\Phi(x)$ 构成希尔伯特空间中的不变子空间,选取 m 个模表示作为 m 重简并表示的基函数式,与波函数 $\Phi(x)$ 对应

$$\Gamma(g_\mu) = \sum_{\oplus} m_i \Gamma^{(i)}(g_\mu), \forall g_\mu \in G$$

$$\chi(g_\mu) = \sum_i m_i \chi_i(g_\mu),$$

$$\text{其中 } m_i = \frac{1}{g} \sum_{g \in G} \chi_i^*(g_\mu) \chi(g_\mu).$$

由 $\Gamma(g_\mu)$ 与 $\chi(g_\mu)$ 的基函数式,可按照标准正交矩阵代数方法进行归化,即

$$\{\Gamma^{(i)}(g_\mu)\} = X^{-1}(\Gamma(g_\mu))X,$$

这相当于下列基函数 $\Phi(x)$ 变换 $\Psi(x)$, 且 $\Psi = \sum \Phi(x) \Lambda$, 符号 Λ 表示归化 $\Gamma(g_\mu) = \sum_{\oplus} \Gamma^{(i)}(g_\mu)$ 式上所含的最低不可约符号,用群表函数 $\Gamma^{(i)}(g_\mu)$ 表示变换的子函数集合 $\{\Phi_\mu^{(i)}\}$.

因此,若 P_g 表示元素对应的变换算符,则

$$P_g \Psi_\mu^{(i)}(x) = \sum \Psi_\mu^{(i)}(x) \Gamma^{(i)}(g_\mu)_{\mu\mu}, \forall g_\mu \in G$$

相应上式的逆变换是

$$\Phi_p(x) = \sum \Psi_p^{(n)}(x) (X^{(n)})_{pp}^{-1},$$

这里, $\Psi_p^{(n)}$ 为属于不可约表示 $\Gamma^{(n)}$ 的第 n 个函数。

令 $P^{(n)}$ 为作用在任意函数 $\Phi(x)$ 上, 可以把属于不可约表示 $\Gamma^{(n)}$ 的第 n 个函数挑选出来的投影算子。令

$$P^{(n)} = \frac{1}{R} \sum_{g \in G} \Gamma^{(n)*}(g) \Gamma^{(n)}(g) P,$$

事实上,

$$\begin{aligned} P^{(n)} \Phi_p(x) &= \sum_{i,p' \neq p} \frac{m_i}{R} \sum_{g \in G} (\Gamma^{(n)*}(g_a)_{pp'}) P_{ii} \Psi_p^{(n)}(X^{(n)})_{pp'}^{-1} \\ &\quad \sum_{n'} \frac{1}{R} \sum_{g \in G} \Gamma^{(n')}(g) \Gamma^{(n')*}(g) \Psi_{p'}^{(n')}(X^{(n')})_{p'p'}^{-1} \Phi_{p'}(x) \\ &= \sum_p \Psi_p^{(n)}(x) (X^{(n)})_{pp}^{-1} \end{aligned}$$

此式右方表示的函数 $\Phi_p(x)$ 中属于不可约表示 $\Gamma^{(n)}$ 的第 n 个函数成分上定义式, 即

$$P^{(n)} = \sum_{p=1}^m P_p^{(n)} = \frac{m_i}{R} \sum_{g \in G} \chi_i^*(g) P_g,$$

$$P^{(n)} \Phi_p = \sum_{i,p} \Psi_p^{(n)}(x) (X^{(n)})_{pp}^{-1} = \sum_{i=1}^m \Phi_p^{(i)},$$

其中 $\Phi_p^{(i)}$ 为属于不可约表示 $\Gamma^{(i)}$ 的函数群。容易看出, 由上面定义的投影算符满足完备性、正交性、等幂性。

Wigner-Eckart 定理 任一物理量算符, 与某些等价不可约表示的函数 (矢量) 相联系, 则不同不可约表示不同行 (函数) 行集是正交的。即同一函数的内积 (即模) 与行序号无关。

证明 令 (上、下标意义同上)

$$\begin{aligned} I &= \Psi_p^{(n)} = \sum \Psi_p^{(n)} \Gamma^{(n)}(g_a), \\ P_g \Psi_p^{(n)}(x) &= \sum \Psi_p^{(n)} \Gamma^{(n)}(g_a)_{ip}, \end{aligned} \quad (\forall g_a \in G),$$

以及内积 (不同表示的行矢量)

$$\langle \Phi_p^{(i)}, \Psi_p^{(n)} \rangle = X_{pp}^{in},$$

则由 $\Psi_p^{(n)} = \sum \Phi_p(x) X_{pp}^{nn}$, 可得

$$\langle \Phi_p^{(i)}, P_g \Psi_p^{(n)} \rangle = \sum \langle \Phi_p^{(i)}, \Psi_p^{(n)} \rangle \Gamma^{(n)}(g_a)_{ip}$$

$$= \sum X_{\mu}^{\mu} \Gamma^{(\mu)}(g_{\alpha}), \forall g_{\alpha} \in G.$$

由内积的性质得

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\mu}^{(\mu)}, P_{\alpha} \Psi_{\mu}^{(\mu)} \rangle &= \langle \Phi_{\mu}^{(\mu)}, P_{\alpha} \Psi_{\mu}^{(\mu)} \rangle = \langle P_{\alpha}^{-1} \Phi_{\mu}^{(\mu)}, \Psi_{\mu}^{(\mu)} \rangle \\ &= \sum_{\lambda} \Gamma^{(\lambda)}(g_{\alpha}^{-1})_{\lambda\mu}^* \langle \Phi_{\lambda}^{(\lambda)}, \Psi_{\mu}^{(\mu)} \rangle = \sum_{\lambda} X_{\lambda\mu}^{\lambda} \Gamma^{(\lambda)}(g_{\alpha})_{\mu\lambda}. \end{aligned}$$

也就是说,

$$X_{\mu}^{\mu} \Gamma^{(\mu)}(g_{\alpha}) = \Gamma^{(\mu)}(g_{\alpha}) X_{\mu}^{\mu}, \forall g_{\alpha} \in G.$$

由舒尔第二引理得

$$X_{\mu}^{\mu} = \begin{cases} 0 & (j \neq i, \text{即不同表示}), \\ \lambda I & (j = i, \lambda \text{ 常数}). \end{cases}$$

§ 4.2 Wigner-Eckart 定理的应用

定义 4.2.1 若能级 E 对应的表示是不可约的, 对简并 $m = 1$ 称为偶然简并, 若对应可约表示则称偶然简并.

设系统的哈密顿量 $H = H_0 + H_1$, 微扰 H_1 与 H_0 有相同对称性.

$$[P_{\alpha}, H_0] = 0, \quad [P_{\alpha}, H_1] = 0.$$

设 $\{\Gamma^{(\mu)}(g_{\alpha})\}$ 为确定波函数 $\Psi_{\mu}^{(\mu)}(x)$ 的不可约表示,

$$P_{\alpha} \Psi_{\mu}^{(\mu)}(x) = \sum \Psi_{\nu}^{(\nu)}(x) \Gamma^{(\nu)}(g_{\alpha})_{\nu\mu}, \quad \forall g_{\alpha} \in G.$$

且

$$\begin{aligned} P_{\alpha} [H_1 \Psi_{\mu}^{(\mu)}(x)] &= H_1 P_{\alpha} \Psi_{\mu}^{(\mu)}(x) \\ &= \sum [H_1 \Psi_{\nu}^{(\nu)}(x)] \Gamma^{(\nu)}(g_{\alpha})_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

对于正则简并, 能量一级微扰矩阵元

$$E_{\mu}^{(1)} = \langle \Psi_{\mu}^{(\mu)}, H_1 \Psi_{\mu}^{(\mu)} \rangle = \delta_{\mu\mu} \Delta E,$$

其中

$$H_0 \Psi_{\mu}^{(\mu)}(x) = E \Psi_{\mu}^{(\mu)}(x), H_1 \Psi_{\mu}^{(\mu)}(x) = \Delta E \Psi_{\mu}^{(\mu)}(x).$$

也就是说, 能级 E 不移, 但本征态 $\Psi_{\mu}^{(\mu)}$ 比微扰前 $\Psi_{\mu}^{(0)}$ 分裂开 (除偶然简并).

对于偶然简并, 属于不同不可约表示的各波函数, 能级有相同移动不会分裂开, 对属于两个不等价不可约表示的波函数, 能级移动不相等, 能级会发生分裂, 简并会部分消除, 直到变成正则简并. 一般有

$$\langle \Psi_{\mu}^{(\mu)}, H_1 \Psi_{\nu}^{(\nu)} \rangle = \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \Delta E.$$

例 4.2.1 面体群 T_d 对某分子能级的一级微扰简化

图 4.1 为苯 (C_6H_6) 分子结构图, 其 6 个碳原子共有 6 个价电子, 有 6 个 σ 电子系集中键在碳原子间, 其波函数主要分布在碳—碳与碳—氢的键上。另一个价电子即 π 电子绕苯环转动, 主要垂直于环平面 (图 4.2)。

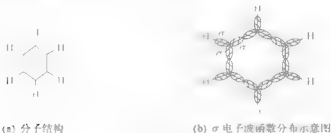


图 4.1 苯分子结构图

碳 $Z = 6$, K 壳层 ($n = 1, l = 0$) 有 2 个电子 (填满), L 壳层 ($n = 2, l = 0, l = 1$) 有 8 个电子 (4 个空着)

图 4.2 苯分子中局域化的 π 电子

π 系统的哈密顿量为 $H\Psi = E\Psi$, 且 $H = H_0 + H_1, H_0 = \sum_{i=1}^6 \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^6 \frac{p_{\pi i}^2}{2m_{\pi i}}$, n 为第 i 个电子的动量, $H_1 = \sum_{i=1}^6 V_i$, V_i 表示电子与碳原子核的相互作用, 采用变分法解决此问题。

$$\int \Psi^* (H - E) \Psi = 0.$$

其中 $\Psi(r)$ 表示内部 π 电子 (p 波) 的近似波函数。

$$\Psi(r) = \sum_i a_i \Phi(r - r_i),$$

a_i 为待定函数, r_i 表示第 i 个碳原子的位置, 简记

$$\Phi_i = \Phi(r - r_i) (i = 1, 2, \dots, 6),$$

则本征值方程以确定 a_1, a_2, \dots, a_6 与 $\Phi(r - r_i)$ 的 r 关系 (r 为常数),

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_6 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_6 \end{pmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6),$$

或等价的久期方程 $\det |H_{ij} - E\delta_{ij}| = 0$, 其中

$$H_{ij} = \langle \Phi_i | H | \Phi_j \rangle = \int d^3x \Phi_i^*(r) H \Phi_j(r).$$

1 色子, I 在四面体群 I 下具有 4 重简并, a 绕 z 轴转动 $2\pi/6$, b 为对 z 轴的反射操作 (图 4.3), 则有 $a^6 = b^2 = I$ (恒等变换), $aba = b$.

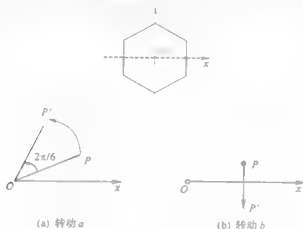


图 4.3 D_6 四面体对称操作

集合 $D_6 = \{I, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ba, ba^2, ba^3, ba^4, ba^5\}$,

阶 $g = 12$, 有 6 个类 ($c = K = 6$), (注意: $a^3 = a^0 = I$),

$$e_1 = \{I\}, n_1 = 1; e_2 = \{a^2\}, n_2 = 1; e_3 = \{a^4\}, n_3 = 1;$$

$$e_4 = \{a^2, a^4\}, n_4 = 2; e_5 = \{a^3, a^0\}, n_5 = 2;$$

$$e_6 = \{b, ba^2, a^2b\}, n_6 = 3.$$

由伯恩塞德定理 $g = \sum l_i^2 = 12$, 有

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12.$$

利用 Wigner-Eckart 定理, $\forall g_a \in D_6, g_a H = H g_a$, 有

$$\langle \Phi_i^{(c)} | H | \Phi_j^{(c)} \rangle = \delta_{ij} \delta_{cc'} \langle I | H | I \rangle,$$

其中 Φ_i 为群 D 的第 i 个不可约表示 I_i 的相应表示空间的基, $i = 1, 2, \dots, \ell$,

即

$$P_a \Phi_p^{(n)}(x) = \sum \Phi_p^{(n)}(x) \Gamma^{(n)}(g_a)_{pp}.$$

Φ_p 前即 111 、 $11\bar{1}$ 等表示 (和 1 或者量子数 n 无关) 的约化矩阵元, 因此会将久期方程约化为几个独立小块, 从而求得久期, 且, 由不可约表示知为

换言之, 某分子能级按 111 、 $11\bar{1}$ 等表示 (或 1 表示) 的量子数相异的能级简并度 (不计偶然简并)。

凡寻找 111 的生成元 E, J_z, J_y 表示即为 E, J_z, J_y , 再将它约化, 提出低维的不可约表示分量。

由图 4-1-1 中, 轴直接第一、第二、第三轴, 与 111 对应。令 P^{-1} 与 P 表示生成元 E 与 J 操作, 与 111 对应

$$P_b \Phi_i(r) = P_b \Phi_i(r - r_i) = \Phi_i$$

$$P_a(r - r_i) = \Phi(P_a(r - P_a^{-1}r_i)) = \Phi(r - P_a^{-1}r_i)$$

$$P_b(r - r_i) = P_b = P_b \Phi_i(r - r_i) = \Phi(r - r_i) P_b,$$

其中利用了对称关系

$$\Phi(P_a(r)) = \Phi(r).$$

从而 Φ_i 生成函数 Φ_i 关于 E, J 具有 111 的对称性

$$P_b \Phi_i(r) = P_b \Phi_i(r - r_i) = \Phi(P_a(r - (r_i)))$$

亦即 P_b 与 P_a 的作用使得

$$P_a: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2 \rightarrow \Phi_3 \rightarrow \Phi_4 \rightarrow \Phi_5 \rightarrow \Phi_6 \rightarrow \Phi_1 (\text{轮换}),$$

$$P_b: \Phi_1 \rightarrow \Phi_1, \Phi_2 \rightarrow \Phi_6, \Phi_3 \rightarrow \Phi_5, \Phi_4 \rightarrow \Phi_4,$$

由

$$P_a \Phi_p = \sum \Phi_b \Gamma_{ap}(a)$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \Gamma(a)_{11} & \Gamma(a)_{12} & \cdots & \Gamma(a)_{16} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma(a)_{61} & \cdots & \cdots & \Gamma(a)_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

易得 $\Gamma(a)$ 的显示表达式, 同样可得 $\Gamma(b)$:



1

$$\Gamma(a) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \Gamma(b) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

现在将化简后的表示, 为此我们找到在 $\Gamma(a)$ 表示的基 (利用群 D_6 的特征标, 表 4.1, D_6 群为阶群, 特征标均为实数) 和化简后的

$$P^{(a)} = \sum_{i=1}^6 m_i P^{(a)}_{i1}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 6, \quad \sum m_i \chi_i = 1, \text{ 其中 } P^{(a)}_{i1} = \chi_i^{-1}.$$

D_6 的第 i 个不可约表示, $n = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 n_i \chi_i = 1$, 与群 D_6 的基 E_1

表 4.1 群 D_6 的特征标表

| $\chi \in \Gamma(a)$ | e_1 | e_2 | e_3 | e_4 | e_5 | e_6 |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Γ 不可约表示 | $n_1 = 1$ | $n_2 = 1$ | $n_3 = 2$ | $n_4 = 2$ | $n_5 = 3$ | $n_6 = 3$ |
| $\chi_1^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_3^{(1)}$ | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| $\chi_4^{(1)}$ | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_5^{(1)}$ | 2 | 2 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| $\chi_6^{(1)}$ | 2 | -2 | 1 | -1 | 0 | 0 |

基 E_1, E_2, E_3 和 E_4 为本征值, 具体数值 E_1 与群 D_6 的基

$$E_1 < E_2 < E_3 < E_4.$$

能吸 E_1, E_2 有四个 π 电子, E_3 和 E_4 各有二个电子. 果分子系统基态为 E_1 态, 激发态是 E_2, E_3, E_4 态. 在量子核磁共振的计算, 电子 E_1, E_2 与 K. G. Klenn-Gordon 系数的计算中也有 E_1, E_2, E_3, E_4 .

问题 4.2

1. 完成 D_6 群特征标表的具体计算.

2. 证明 $\Psi = \sum \Phi_i$ 式定义的投影算符具有 D_6 性质:

$$P^{(a)} P^{(b)} = \delta_{ab} P^{(a)} P^{(b)} = P^{(a)} P^{(b)} \quad (\text{正交性、等幂性}),$$

$$\sum P^{(i)} = \sum P^{(i)} = I \text{ (单位矩阵), (完备性).}$$

§ 4.3 对称群的标准表示

这一节我们研究对称群的群结构及各子表示。子表示是有单群的忠实表示，其一般定义前面已经谈到，本节主要讨论对称群的子表示。

1. 正则表示

给出映射 $f: P \rightarrow n \times n f(P)$ 矩阵。

矩阵中只有 n 个元素等于 1，其余均为 0。置换 P 的第 i 列确定 P 的第 j 个非零矩阵元 ($P = i, j$ 中 i 为第 i 行数字 i 的脚标， j 为第 j 行数字 j 的脚标)，与交换对象的一种排列内视为行矢量。

例 4.3.1

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{(n)} \rightarrow f(P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (a_4 \ a_1 \ a_3 \ a_2).$$

显见 P 与 $f(P)$ 有一一对应的关系，效果完全相同。

一般规则：设有 $P_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{bmatrix}$ 。

则 $f(P)$ 的矩阵元按上述规则，有

$$[f(P_i)]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha i_1} \delta_{1\beta} + \delta_{\alpha i_2} \delta_{2\beta} + \cdots + \delta_{\alpha i_n} \delta_{n\beta} (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n).$$

容易证，集合 $\{f(P) \mid P \in P_n\}$ 是群的， $f(P)$ 表示，简称正则表示。子表示的维数等于置换群的阶 $n!$ ，即 $n!$ 个标量。

由凯莱定理，任何有限群 G 都等价于在凯莱集合 G 的置换群 P_n 中。

$$P(g_\alpha) = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_\alpha & g_\alpha & \cdots & g_\alpha \end{bmatrix}.$$

应用上述规则可得 P_n 对置换的集合 $\{f(P) \mid P \in P_n\}$ 给置换群的正则表示。又其在定义与前面的定义是完全等价的。

其中 $\rho_{k-1,k}$ 为 k 所在行与 Young 盘中 $k-1$ 的轴距离, 其定义:

$$\rho_{k-1,k}([\lambda]r) = \text{col}(k) - \text{col}(k-1) = [\text{row}(k) - \text{row}(k-1)].$$

符号 $\text{col}(k)$ 和 $\text{row}(k)$ 分别表示数字 k 所在的列与行的序数, 矩阵 $P^{[\lambda]}$ 是文中给出.

例 4.3.4 求 3 次对称群的标准表示.

表示 $\Gamma^{[3]}$ 对应一个 Young 盘(见例 4.3.3), 系一维表示

$$\rho_{12} = \text{col}(2) - \text{col}(1) = [\text{row}(2) - \text{row}(1)] = 2 - 1 = [1 - 1] = 1, \rho_{23} = 1,$$

于是相邻对称符号表示为 1. 其他符号置换用表示为偶置换为 1 表示, $\Gamma^{[3]}$ 对应 1 个 Young 群, 系一维表示, 且 $\rho_{12} = \rho_{23} = 1$, 其他 $\rho_{ij} = 0$.

$$\Gamma_{11}^{[3]} = \Gamma_{11}^{[3]} \Gamma_{11}^{[3]} \times \Gamma_{11}^{[3]} = (-1)^3 = -1,$$

$$AS\Gamma_{132}^{[3]} = \Gamma_{13}^{[3]} \cdot \Gamma_{32}^{[3]} = (-1)^3 \cdot (-1) = 1,$$

即奇置换为 -1, 偶置换为 1.

表示 $\Gamma^{[2,1]}$ 对应两个 Young 盘, 记为 1 和 2, 系一维表示, 对于 Young 盘 1, 当数字 $1 \leftrightarrow 2$ 时, $\Gamma_{11}^{[2,1]}$ 的

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{r} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \text{非对角元素为 0}$$

对角元素

$$(\Gamma_{11}^{[2,1]})_{11} = \langle [21]1 | P_{1,2} | [21]1 \rangle_{11} = \rho_{12}^{-1} \langle [21]1 \rangle = 1,$$

$$(\Gamma_{11}^{[2,1]})_{22} = \langle [21]2 | P_{1,2} | [21]2 \rangle = \rho_{12}^{-1} \langle [21]2 \rangle = -1,$$

即

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

再考虑表示矩阵 $\Gamma^{[2,1]}$ 对应两个 Young 盘, 记为 1 和 2, 当 $1 \leftrightarrow 3$ 时,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(1 \leftrightarrow 3)} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad (r=1),$$

亦因此得到 2 个非对角矩阵, 为 $\rho_{13}/2$, 即

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^{[2,1]})_{12} &= \langle [21]1 | P_{1,3} | [21]2 \rangle = (1 - (\rho_{23} \langle [21]2 \rangle)^{1/2}) \\ &= (1 - (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}) \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = (\Gamma_{12}^{[2,1]})_{21}. \end{aligned}$$

至于对角元 $(\Gamma_{11}^{[2,1]})_{11} = \langle [21]1 | P_{1,3} | [21]1 \rangle = \rho_{23} \langle [21]1 \rangle^{-1} = -1/2$,

$$(\Gamma_{11}^{[2,1]})_{22} = \rho_{23} \langle [21]2 \rangle^{-1} = \frac{1}{2},$$

即
$$\Gamma_{12}^{(21)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

其余表示矩阵可以同样得到,见表 4.2.

表 4.2 S_3 群的标准表示

| 表示 \ 群元 | $\Gamma^{(1)}$ | $\Gamma^{(2)}$ | $\Gamma^{(3)}$ |
|---------|----------------|---|----------------|
| E | 1 | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | 1 |
| (123) | 1 | $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{vmatrix}$ | 1 |
| (23) | 1 | $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ | -1 |
| (13) | 1 | $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$ | -1 |
| (132) | 1 | $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{vmatrix}$ | +1 |
| (12) | 1 | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | -1 |

问题 4.3

1. S_n 群中任一 n 元基本置换为对换乘积, 对换总数的奇偶性不变.

[提示: 构造范德蒙(Vandermonde)行列式,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

在任何对换作用下, D 的符号 ± 1 改变符号 $\forall i < j \leq n$, 且 $x_j - x_i$ 分解成 k 个对换, 则 $g_n D = (-1)^k D$, 因子 $(-1)^k$ 与分解的方式无关.]

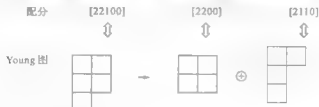
2. 设 $\forall g_n \in S_n, a_i^{(j)} (j = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, j)$ 取 $1, 2, \cdots, n$, 若有

$$x \in L_G, x = (a_1)^{\alpha_1} (a_1^{(2)}, a_2^{(2)})^{\alpha_2} \cdots (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)})^{\alpha_n},$$

Young 表, 对应着在 Γ^{λ} 中所包含的所有对称群 S_n , 可约表示 $\Gamma^{\lambda_1} \oplus \Gamma^{\lambda_2} \oplus \dots$, 这就是所有的分支律, 可表述为:

$$\Gamma_n^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k} = \sum \Gamma_n^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k \lambda_{k+1}}.$$

例 4.4.1 将 S_3 的不可约表示 Γ^{λ} 约化为 S_2 的不可约表示 Γ^{μ} .



$$\Gamma_5^{[22100]} = \Gamma_3^{[2200]} \oplus \Gamma_3^{[2110]}.$$

例 4.4.2 $\Gamma_5^{[2221]} = \Gamma_3^{[32]} \oplus \Gamma_3^{[3211]} \oplus \Gamma_3^{[2211]}.$

S_n 群不可约的两个表示的直积称为内积, 也是 S_n 的一个表示, 其约化用 Young 图很方便.

例 4.4.3 $SU(3)$ 群中的内积.

若用 1^{\times} 方格代表 $SU(3)$ 的一个基础表示, 的基矢, 数字 $1, 2, \dots$ 有五种填充方法 (Young 盘), 故基础表示维数为 3, 两分克表示为 u, v

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \quad (\text{对称})$$

(反对称)

其中 $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ 用 $1, 2, 3$ 填充可得 6 个 Young 盘, 维表示 6, 置 $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 格图则对应 1^{\times} Young 盘 (3 维表示).

如果 3 个夸克构成重子, 则用 Young 图表示为

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

此时注意, 有补充规则, 凡一格一列应删去, 则有表第 1 图对应 8 个 Young 盘, 即 8 维表示:



即是夸克模型中重子、重态“八重道”一词亦由此而来. 右边第 1 图, 对应 1^{\times} Young 盘, 是全对称单态.

$$s\Gamma \quad \Gamma \quad \Gamma \quad \Gamma \quad \Gamma \quad \Gamma \quad \Gamma \quad \cdots \Gamma \quad \Gamma \quad \Gamma$$

例 4.4.5 $SU(n)$ 群约化为 $SU(n-1)$ 的规则.

从表示的对应的标准 Young 图中用 -1 来破坏 Young 图规则的办法有格子 i 标, 记 n , 然后去掉带 n 的方格, 余下的 Young 图对应 $SU(n-1)$ 的不可约表示. 例如,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & n \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & n \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & n & n \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & n \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & n & n \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

当 $n=4$ 的维数依次为 20206 维、10 和 4 维.

例 4.4.6 $SU(n)$ 群的维度公式.

$SU(n)$ 群的 $n-1$ 基元表示用 $n-1$ 单列 Young 图表示, 每行格子数为 $1, 2, \dots, n-1$, 用 $n-1$ 个整数表征, 如 $SU(4)$,

$$\begin{array}{ccc|l}
 \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} & \left. \begin{array}{l} (100) \quad (010) \quad (001) \\ \text{彼此不等价. 在一般情况下, 如果用 } \mu_i (i=1, \dots, n) \text{ 表示每行的格子数, 则 } \rho = \mu_1 - \mu_{n-1} \quad (i=1, \dots, n). \end{array} \right\}
 \end{array}$$

一般有递推公式, $SU(n-1)$ 群的维数

$$\begin{aligned}
 N_{n+1} &= (p_1, p_2, \dots, p_n) \\
 &= \frac{1}{n! \cdots 2!} (p_1 + 1)(p_1 + p_2 + 2) + \cdots + (p_1 + p_2 + \cdots p_n + n) \\
 &\quad \cdot (p_2 + 1)(p_2 + p_3 + 2) \cdots (p_2 + \cdots + p_n + n - 1) \cdots (p_n + 1),
 \end{aligned}$$

或

$$N_n = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = \frac{(n-1)!}{n!} (p_1 + 1)(p_1 + p_2 + 2) \cdots (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + n - 1) \cdots (p_{n-1} + 1)$$

特别地, 对于 $SU(2)$ 有

$$N_2(p) = p + 1,$$

对于 $SU(3)$ 和 $SU(4)$ 有

$$N_3(p_1 p_2) = \frac{1}{2} (p_1 + 1)(p_1 + p_2 + 2)(p_2 + 1),$$

$$N_4(p_1 p_2 p_3) = \frac{1}{213!} (p_1 + 1)(p_1 + p_2 + 2) \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + 3) \\ \cdot (p_2 + 1)(p_2 + p_3 + 2)(p_3 + 1).$$

对于 $SU(n)$ 第一个与第二个基础表示的直积

$$\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$(1 \ 0^{\alpha-2}) \otimes (0 \ 1 \ 0^{\alpha-3}) = (1 \ 1 \ 0^{\alpha-3}) + (0 \ 0 \ 1 \ 0^{\alpha-4}).$$

右起第一个 $\gamma = \alpha_{n-3}$, $\gamma = \alpha_{n-3}$ 与 α_{n-2} 之和 $\gamma + \alpha_{n-2}$ 是 α_{n-2} , $\gamma + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3}$ 是 α_{n-1} , $\gamma + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-4}$ 是 α_{n-2} , $\gamma + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-5}$ 是 α_{n-3} , $\gamma + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-6}$ 是 α_{n-4} , $\gamma + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-6} + \alpha_{n-7}$ 是 α_{n-5} , 依次类推, 得到

$$(n) \otimes (n) = (n^2 - 1) \oplus (1).$$

对于 $SU(3)$,

$$(3) \otimes (3) = 6 \oplus \bar{3}.$$

问题 4.4

用 S_3 和 S_2 表示 $U^{\otimes 3}$ 将 $S_3 \times S_2$ 的不可约表示归化, 并验证表示数 χ_{λ} 与 χ_{μ} 的乘积 $\chi_{\lambda} \chi_{\mu}$ 与 $\chi_{\lambda + \mu}$ 相等. 求 S_3 和 S_2 的不可约表示, 并验证 $S_3 \times S_2$ 的不可约表示与 $U^{\otimes 3}$ 的不可约表示以及此不可约表示的标准基.

解 1. S_3 的不可约表示 $U^{\otimes 3} = U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3}$ 进行直积分解.

4. 求 S_3 的 $\Gamma_1^{(21)} \otimes \Gamma_1^{(21)} \otimes \Gamma_1^{(21)}$.

解 1. S_3 的不可约表示 $U^{\otimes 3} = U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3}$ 进行直积分解.



(a)



(b)



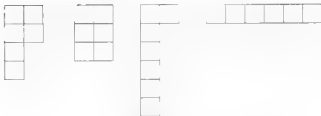
(c)

Young 图 (a), (b), (c) 在 S_3 的不可约表示 $U^{\otimes 3}$ 的直积分解中出现的次数是多少?

6. 试根据表示的对称性, 分析与上述 (1) 中各 $U^{\otimes 3}$ 对应的 S_3 的多重态 (即表示维度) 所包含的 $SU(3)$ 和 $SU(2)$ 多重态.

解 1. S_3 的不可约表示 $U^{\otimes 3} = U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3}$ 进行直积分解.

8. 在 S_3 的不可约表示 $U^{\otimes 3} = U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3} \oplus U^{\otimes 3}$ 中, 求 S_3 的不可约表示 $U^{\otimes 3}$ 的多少重态.



§ 4.5 Young 对称子及应用

对称群 S_n 的基矢当然也可以由一般右对称子构造基矢的方法求得,但字码一旦稍低 $\lambda = (1, 1, 1)$ 对称子方法比更有改进,且可同对称子方法,可以推广到 $SO(n)$, $SO(n)$ 等对称群中.在物理学中,可用同样的方法去解决多粒子体系波函数的对称化问题.

设用 r 表示只改变列,而不改变行的置换,反之, q 则表示只改变行,而不改变列的

置换,令 $\forall p_i \in S_n, \forall q_j \in S_n$, 则集合 $\left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right|$,

$$a[f] = \sum p_i, b[f] = \sum \delta q_j,$$

其中,“ $\left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right|$ ”为偶置换子,“ $\left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right|$ ”为奇置换子,“ f ”表示第 i 个格子数 f_i 格子的成群空间中的子代数.

例 4.5.1 $S_4; f_1 = f_2 = 2, f_3 = f_4 = 0$.

$$\{p_i; E, (1,2), (3,4), (1,2), (3,4),$$

其中如 $(1,2), (3,4) \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{array} \right|$,

$$E, (1,2), (3,4), (1,2), (3,4), \dots$$

其中如 $(1,3), (2,4) \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{array} \right|$,

$$a[f] = E + (1,2) + (3,4) + (1,2)(3,4),$$

$$b[f] = E - (1,3) - (2,4) + (1,3)(2,4).$$

显然,对于此图 \dots 分别是对称算符,反对称算符,容易验证

$$a[f] = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$b[f] = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

定义 4.5.1 Young 对称子亦称 Young 符号, 表式.

$$c[f] = \sum \delta q_i p_i.$$

对于例 4.5.1, 此式右边有 19 项.

$$\begin{aligned} c[f] = & E + (1,2) + (3,4) + (1,2)(3,4) - (1,3) - (2,4) + (1,3)(2,4) \\ & - (1,3) - (2,4) + (1,3)(2,4) - (1,3)(1,2) \\ & - (1,3)(3,4) - (1,3)(1,2)(3,4) - (2,4)(1,2) - (2,4)(3,4) \\ & - (2,4)(1,2)(3,4) + (1,3)(2,4)(1,2) \\ & + (1,3)(2,4)(3,4) + (1,3)(2,4)(1,2)(3,4). \end{aligned}$$

根据 Young 对称子, 可以定义 λ 群的不变量为表示 λ 的投影符号 (或原始等解元):

$$P_{\lambda} = \frac{1}{d_{\lambda}} \sum_{\sigma \in \lambda} \sigma \cdot \chi_{\lambda}(\sigma).$$

其中 d_{λ} 为群 G 的维数, χ_{λ} 为 λ 的表示.

$$(1) P_{[f]} \cdot P_{[f]} = P_{[f]} \quad 1 \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right]$$

(2) 原始性:

若 $P_{[f]} = P_{[1]} + P_{[2]}$, 且 $P_{[1]}P_{[1]} = P_{[1]}$,

$$P_{[1]}P_{[2]} = P_{[2]}, P_{[2]}P_{[2]} = P_{[2]}.$$

则 $P_{[1]} = 0$ 或 $P_{[2]} = 0$.

再令 λ 为 Young 符号, λ 为一个原始等解元, 则有 Young 对称子 P_{λ} 彼此相互独立, 构成一组完备的集合.

例 4.5.2 对称群 S_3 的 Young 对称子, 原始等解元

$$\text{Young 对称子: } P_{[1]} = \frac{1}{3} (E + \sigma + \sigma^2), \quad P_{[2]} = \frac{1}{2} (\sigma + \sigma^2).$$

其中 $a[210] = E + (1,2)$, $b[210] = E - (1,3)$.

$$c[210] = \sum \delta q_i p_i = E + (1,2) - (1,3) - (1,3)(1,2)$$

$$= I + (1, 2) + (1, 3) + (1, 2, 3).$$

原始等幂元

$$P_{[210]} = \frac{d[f]}{3!} c[210] = \frac{2}{3 \times 2 \times 1} c[210] = \frac{1}{3} c[210].$$

为了构造相应的么正表示, 令

$$\Phi_{\mu\nu\lambda} = \xi_\mu(1)\xi_\nu(2)\xi_\lambda(3)$$

为三个 1、2、3 变函数的乘积, $\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3$, 于是可求得

$$\begin{aligned} c[210]\Phi_{\mu\nu\lambda} &= [\xi_\mu(1)\xi_\nu(2) + \xi_\nu(1)\xi_\mu(2)]\xi_\lambda(3) \\ &= [\xi_\lambda(1)\xi_\nu(2)\xi_\mu(3) + \xi_\lambda(1)\xi_\mu(2)\xi_\nu(3)] \\ &= \Phi_{\mu\nu\lambda} + \Phi_{\nu\mu\lambda} - \Phi_{\lambda\mu\nu} - \Phi_{\lambda\nu\mu} = \Psi_{\mu\nu\lambda}. \end{aligned}$$

形式上记为 $\begin{smallmatrix} \mu & \nu \\ \lambda \end{smallmatrix}$

即么正表示 ρ 在对称化后, 可写成 $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4$.

$$(1)\Psi_{\mu\nu\lambda} = \Psi_{\nu\mu\lambda}$$

$$(2)\Psi_{\mu\nu\lambda} + \Psi_{\nu\mu\lambda} + \Psi_{\lambda\mu\nu} = 0$$

(消除全对称部分 $|\mu|\nu|\lambda|$ 的条件, 即单态). 由于

$$(1, 2)\Psi_{\mu\nu\lambda} = \xi_{\mu\nu\lambda} \Rightarrow (1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} (1, 2)\xi_{\mu\nu\lambda} &= \Psi_{\mu\nu\lambda} \\ (1, 3)\Psi_{\mu\nu\lambda} &= -\Psi_{\mu\nu\lambda} \\ (1, 3)\xi_{\mu\nu\lambda} &= \xi_{\mu\nu\lambda} - \Psi_{\mu\nu\lambda} \end{aligned} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中 $\xi_{\mu\nu\lambda} = \Phi_{\mu\nu\lambda} + \Phi_{\nu\mu\lambda} - \Phi_{\lambda\mu\nu} - \Phi_{\lambda\nu\mu}$

$$\begin{aligned} (2, 3)\Psi_{\mu\nu\lambda} &= \Psi_{\mu\nu\lambda} - \xi_{\mu\nu\lambda} \\ (2, 3)\xi_{\mu\nu\lambda} &= -\xi_{\mu\nu\lambda} \end{aligned} \Rightarrow (2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

S_3 的正交基矢及么正表示,

唯妙讨论例 1, 现将表示么正化, 就是找到在 S_3 变换下使二次型

$$f(\Psi, \xi) = \alpha\Psi^2 + \beta\Psi\xi + \lambda\xi^2$$

保持不变的表示.

由于 $(1, 2)f(\Psi, \xi) = f(\Psi, \xi)((1, 2)\Psi = \xi)$,

即

$$\gamma\Psi^2 + \beta\Psi\xi + \alpha\xi^2 = \alpha\Psi^2 + \beta\Psi\xi + \gamma\xi^2 \Rightarrow \alpha = \gamma,$$

也由于 $(1,3)\Psi = \Psi - \xi$, $(1,3)f(\Psi, \xi) = f(\Psi, \xi)$, 即

$$\alpha\Psi^2 + \beta(-\Psi)(\xi - \Psi) + \gamma(\xi - \Psi)^2 = \alpha\Psi^2 + \beta\Psi\xi + \gamma\xi^2 \Rightarrow \alpha + \beta = 0, \\ \text{即 } f(\Psi, \xi) = \alpha\Psi^2 + \alpha\Psi + \alpha\xi^2 = \alpha(\Psi - \Psi\xi + \xi - \xi^2) \text{ 在 } S_3 \text{ 置换下保持不变, 注意到,} \\ (\Psi - \xi)^2 = (\Psi\xi - \xi)^2, \Psi - \xi = \xi - \Psi\xi, (\Psi - \xi) = (\Psi\xi - \xi),$$

其中单位向量 $e = 1/\sqrt{2}$, $\Phi = 1/\sqrt{2}(\Psi - \xi)$, $\Psi = 1/\sqrt{2}(\Psi + \xi)$ 为正交向量
由于

$$\left. \begin{aligned} (1,2)\Phi^{(1)} &= \Phi^{(1)} \\ (1,2)\Phi^{(2)} &= -\Phi^{(2)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \left. \begin{aligned} (1,3)\Phi^{(1)} &= -\frac{1}{2}\Phi^{(1)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\Phi^{(2)} \\ (1,3)\Phi^{(2)} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\Phi^{(1)} - \frac{1}{2}\Phi^{(2)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1,3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \left. \begin{aligned} (2,3)\Phi^{(1)} &= \frac{1}{2}\Phi^{(1)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\Phi^{(2)} \\ (2,3)\Phi^{(2)} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\Phi^{(1)} + \frac{1}{2}\Phi^{(2)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2,3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

这正好是我们早先求得的 S_3 的标准表示.

为方便起见, 我们再将 S_3 的 Young 图 (对称子) 的一般置换与原始基元的正交化般方法.

Young 对称子可视为对称群代数中的元素, 一般可表为

$$e[\mathcal{J}] = \sum_{g \in S_n} F(g_s) g_s = \sum \delta_i q_i p_i,$$

其中系数 $F(g_s) = 1$, 当联合置换可表示为 i 个 p_i 形式时, $F(g_s) = 0$ 其它 $F(g_s) = 0$, δ_i .

根据 $\{p_i\}$ 与 $\{q_i\}$ 的定义, 显然有

$$p_i a[\mathcal{J}] = a[\mathcal{J}] p_i = a[\mathcal{J}],$$

注意 $a[\mathcal{J}]$ 并不属于 S_n , 它等价于先取 Young 图 \mathcal{J} 中每行的所有置换变换加起来, 然后再将这些和式相加 (横向置换):

$$a[\mathcal{J}] = \sum p = \sum (\prod p_i) = \prod (\sum p_i),$$

其中 p 表示 Young 图中第 i 行数字间的任意置换 $p = \prod p_i$, 即各行 p_i 的乘积. 同样,

$$b[\mathcal{J}] = \sum \delta_i p_i = \sum (\prod_i \delta_{q_i} q_i) = \prod_i (\sum \delta_{q_i} \cdot q_i).$$

又有

$$qb[f] - b[f]q = \delta_q Q,$$

这样就得到 Young 对称子的重要性质:

$$c[f] = \rho c[f] - \delta_q c[f] = \delta_q \rho c[f]q,$$

进而可得组合系数

$$F(g_a) - F(\rho g_a) = \delta_q F(g_a q) = \delta_q F(\rho q),$$

尤其是若 $c[f]$ 中包含的置换 ρq , 有

$$1 = F(E) = F(\rho) = \delta_q F(q) = \delta_q F(\rho q),$$

由此可见, 一个 Young 图 λ 如果与 f 对应, 则 λ 是 Young 图, 且亦对应 f , 则 Young 对称子 $c[f]$, 它们可由 S_n 所负载的 n 个函数基

$$\forall p_i \in S_n, \varphi(1, 2, \dots, n) = p_i \varphi(1, 2, \dots, n) \quad (i = 1, 2, \dots, f),$$

$$\sum_{i=1}^f \varphi_i = 1,$$

且上列 f 个函数基构成 Young 图的混合对称化

$$\psi = \varphi_1 + \dots + \varphi_f = \forall \lambda \in \lambda, \psi = \varphi_1 + \dots + \varphi_f.$$

f 个函数 ψ 将构成 λ 的一个不变子空间, 函数 λ 的不同表示, f 与 λ 标度基比较, 有 f 找方便的优点, 对于每一个不同表示, 对应一个 Young 图, 只要找 f 个 Young 图, 就可利用 Young 对称子得到 Young 图基 (但缺点是正交性的, 有行组基是么正的).

利用 Young 对称子, 构造正交的原始等幂元就是为了解决 Young 图基的正交缺点, f 个互相正交的原始等幂元 $e_i (i = 1, 2, \dots, f)$ 是

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, f),$$

其中 $e_i = c^{(i)} y^{(i)}$, 可以证明 $y^{(i)}$ 定义如下:

$$y^{(i)} = \frac{1}{f!} \sum_{j=1}^f j^i \lambda_j = \frac{1}{f!} \sum_{j=1}^f j^i \lambda_j.$$

相应构造的 e_i 满足正交条件, 且中第一个是下列形式之和

$$(1)^m \rho_a \rho_b \rho_c \dots, t < k < l < t < \dots,$$

m 为所包含的 p 因子个数.

所谓 Young 对称子的正交性系数 $C' \cdot C = 0$.

其中 C 不具备相互性, 即上式并不表明 $C' \cdot C = 0$. 在讨论正交性时, 定义 Young 对称子大小, 重要的若两个 Young 图对应的阶分为 $f_1, f_2, \dots, f_j, f_1, f_2, \dots, f_j$, 逐次考察 $C' \cdot C$, 其中第一个不为零的差是正的, 且 C' 对应 Young 图大于 f Young 图反之, Young 图 f 小于 Young 图 f' 对于同属一个 Young 图的话 Young 图, 将第一行数字

放在第一行的右边,第 i 行数字又放在第一行的右边,直至有 N' 数字,对应 N' 个数,较大者,称为较大的 Young 盘 $C' = (c_1, c_2, \dots, c_{N'})$,或 Young 盘 $(c_1, c_2, \dots, c_{N'})$, 则有

$$C' \cdot C = 0.$$

例 4.5.3 Young 盘 $C = (1, 2, 3, 4, 5)$ 对应 $C' = (1, 2, 3, 4, 5)$ 盘,按从小到大较小的规则编号,记为

$$C = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline 4 & 5 & & & \\ \hline \end{array}, \quad C^{(1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & 1 \\ \hline 3 & 5 & & & \\ \hline \end{array}, \quad C^{(2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & 1 & \\ \hline & & & 3 & 5 \\ \hline \end{array},$$

$$C^{(4)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline \end{array}, \quad C^{(5)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

显然,

$$C^{(5)} \cdot C^{(4)} = C^{(4)} \cdot C^{(3)} = C^{(3)} \cdot C^{(2)} = C^{(2)} \cdot C^{(1)} = 0.$$

但是,

$$C^{(4)} \cdot C^{(5)} \neq 0 \text{ (正交性不要求 } C^{(4)} \cdot C^{(5)} = 0, \text{ 等)}.$$

由于 $\lambda = (1, 1, 1, 1, 1) = R(\lambda)$, $\lambda = (1, 1, 1, 1, 1)$, 但 R 是将 C 变为 C' 的置换

$$R_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} = (2453) = [(24)(35)](34),$$

即 $\lambda = (1, 1, 1, 1, 1) = R(\lambda)$, 注意 $\lambda = (1, 1, 1, 1, 1)$ 中无同置换而在 C 的根号置换中无者,故得相应的正交等幂元为

$$(\frac{d(\lambda, \lambda)}{n!}) = \frac{\nu}{5!} = \frac{1}{24},$$

$$P_{[1]}^{(1)} = \frac{1}{24} C^{(1)} [\cap] [E - (2, 4)(3, 5)],$$

$$P_{[i]}^{(i)} = \frac{1}{24} C^{(i)} [\cap] \quad (i = 2, 3, 4, 5).$$

正交等幂元构成群空间的完备集合

$$E = \sum_{[\lambda]} \sum_i P_{[\lambda]}^{(i)} = \frac{1}{n!} \sum_{[\lambda]} d(\lambda) \sum_i C^{(i)} [\cap] y^{(i)} [\cap].$$

S_n 群有 $\frac{n!}{n!} = 1$ 维表示, $\psi = (1, 1, \dots, 1)$ 是恒表示, n 的全对称表示(恒等表示),为一个是用 Young 图表示的 (1) 的全对称表示,又 $f(1, 2, \dots, n)$ 为 n 个对象(粒子)的函数,则全对称函数

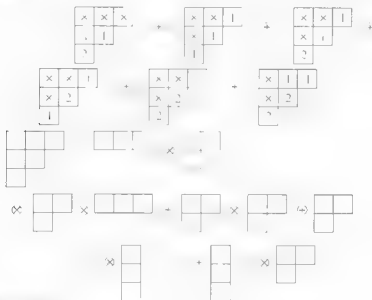
$$\Psi = Sf = \sum_{\lambda \vdash n} P_{\lambda} f(1, 2, \dots, n),$$

$$c \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right) = (2,3)c \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right) (2,3)$$

$$(2,3)c \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right) + c \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right) \quad (\text{代入上式}).$$

作为对称群的陪度 $\lambda \in \text{Orb}(S_n)$ 基本性质从以下合, 例, 再举一例.

例 4.5.5 S_n 群的表示. S_n 群的不可约表示, 按甲式规则, 从相反的程序出发.



相! 代表非数.

$$16 = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2(2 \times 2) + 2 \times 1 + 1 \times 2.$$

问题 4.5

1. 在例 4.5.1 中的对称化条件 $\psi_{\mu\lambda} = \psi_{\lambda\mu}$ 与全反对称条件

$$\psi_{\mu\lambda} + \psi_{\lambda\mu} = 0$$

可以用 Young 对称子表示吗? 它与福克条件有何关系?

2. 如果重新定义 Young 对称子为 $c'[f] = a[f] \cdot b[f]$, 并令

$$\varphi_{\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_{\rho\sigma} - \psi_{\sigma\rho}),$$

则有反对称条件

$$(i)\varphi_{\rho\sigma} = -\varphi_{\sigma\rho}; \quad (ii)\varphi_{\rho\sigma} + \varphi_{\sigma\mu} + \varphi_{\mu\rho} = 0.$$

4.1 条件保证全反对称组合不被剔去. 试问 解例 1.

求 S_3 的 Young 不可约表示, S_4 的 Young 基和不可约表示矩阵.

提示: 有 3 个 Young 盘, 相应 Young 对称子,

$$e^{(1)}[2, 1^2] = [E - (1, 3) - (1, 4) - (3, 4) + (1, 3, 4) + (1, 4, 3)][E + (1, 2)],$$

$$e^{(2)}[2, 1^2] = [E - (1, 2) - (1, 4) - (2, 4) + (1, 2, 4) + (1, 4, 2)][E + (1, 3)],$$

$$e^{(3)}[2, 1^2] = [E - (1, 2) - (1, 3) - (2, 3) + (1, 2, 3) + (1, 3, 2)][E + (1, 4)].$$

S_4 Young 基为 $\{e, (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4), (1, 2, 3, 4)\}$, 故

$$F^{(2,1^2)}(2, 1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$F^{(2,1^2)}(1, 3) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$F^{(2,1^2)}(1, 4) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

从而 $F^{(2,1^2)}(1, 1) = 1, F^{(2,1^2)}(1, 2) = 0, F^{(2,1^2)}(1, 3) = 0, F^{(2,1^2)}(1, 4) = 0, F^{(2,1^2)}(2, 1) = 1, F^{(2,1^2)}(2, 2) = 0, F^{(2,1^2)}(2, 3) = 0, F^{(2,1^2)}(2, 4) = 0$, 等等.

4. 利用 Young 图作外积分解:

$$(1) \boxed{3^2} \otimes \boxed{3};$$

$$(2) [2, 1] \otimes [1^2].$$

5. 证明:

$$(1) [2, 1] = [2] \otimes [1] \ominus [3];$$

$$(2) [1] \otimes [2, 1] = [1] \otimes ([2] \otimes [1] \ominus [3]);$$

$$(3) [1] \otimes [3, 1] = [1] \otimes ([3] \otimes [1] \ominus [4]),$$

此处 \ominus 表示剔去某 Young 图.

6. 完成外积分解:



并写出相应的维数等式, 并将最后结果所代表的不可约表示用标准基和 Young 氏基表示之.

第5章 分子对称群

我们首先介绍分子对称群,再仔细地研究空间对称操作和晶体的对称性,讨论点群的一般特征与分类。首先直观地描述空间对称操作,举出有限几何形体的所有对称操作,至少有一部分,能相应的对称操作构成群,称为点群。

在研究空间对称操作时,以不动点为原点,建立坐标系。所有保持空间任一点矢径的长度不变的对称变换集合构成一个点群(Point Group),点群又属于点群系。

§ 5.1 简单的分子对称群

分子对称群就是由分子的对称操作构成的群。如果分子M的对称操作构成群G,就说分子M属于点群G。在这一章中,我们要求清楚地知道:存在哪些分子对称群,如何确定一个分子所属的对称群。

定义 5.1.1 对称操作能以行的方式,一系列称为物体的对称元素。

例如,旋转轴就是轴(直线)行的,反射是对某个平面进行的,平移是由某一矢量进行的,等等。

定义 5.1.2 如果绕通过物体的一条直线旋转 $360/n^\circ$,使物体复原,就说直线是物体的一个n重旋转轴,记作 C_n 。最大的 C_n 称为主轴。

定义 5.1.3 如果有一个通过物体上点,物体对这个平面的镜像与其自身重合,就说这个平面是物体的一个对称面,或镜面,记作 σ 。对这个平面的反射操作也记作 σ 。

定义 5.1.4 绕n重旋转轴和垂直于该轴作平面,旋转 $(360/n)^\circ$ 接着进行一次反射 σ 能使物体复原,这种复合对称操作就叫做像转,记作 S_n 。特别地,一次像转 $S_2 = \sigma_2 C_2$ 就是反演,记作I。

定义 5.1.5 如果分子对称群中对称操作记为对称元素 ε ,和 ε 换位群,即 ε 和 ε 是共轭对称元素,互相共轭的对称元素其集合生成共轭对称元素系。

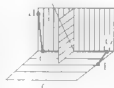
1. 单轴群

只有 C_n 重旋转轴或像转轴(无轴群),只能有n重旋转和n个旋转群 C_n 和 S_n 。

可作无穷小角度旋转,即可作任意角度旋转。可看作它的两种极端情况。

(1) C_n

若分子只有一个 n 重旋转轴,它就属于 C_n 群,群元素为 $\{E, C_n, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}\}$, 这是 n 阶循环群,每个元素自成一类,共有 n 类,属于这一点群的分子如 H_2O_2 [图 5.1(a)], $Cl_2C=CH_2$ [图 5.1(b)], H_2S_2 , CH_3O-OCH_3 (C_2) 以及 $N(SiH_3)_3$ (C_3) 等。



(a)



(b)

图 5.1 某些单轴群的代表分子

当 $n=1$ 时,实际上没有对称轴,但形式上也记成 C_1 群,例如 $CHClBr$, $BrCH_2CH_2Br$ 等。

在 C_n 的基础上若再有对称面,在保证不增加新的旋转轴,因为已假定只有一个旋转轴的条件下,只有一种可能,是产生像转轴 S_n , $S_n = C_n \sigma$, σ 是垂直 C_n 轴,且通过 C_n 轴。

(2) S_n

分子只有一个像转轴 S_n ,就属于 S_n 群,它也是循环群,若 n 为偶数, $n=2m$,则有 n 个元素,分为 n 类 $\{E, S_n, S_n^2, \dots, S_n^{n-1}\}$, $S_n^2, S_n^4, \dots, S_n^{n-2}$ 属于 S_n 群的分子较少,如 $1,3,5$ -四甲基环辛四烯, $C(SiH_3)_4$, 扭错的苯, $N=N(O)-N=N(O)$ (在 $K_2N_4N_2O_4$ 晶体中) (S_8) 等。

当 $n=2$ 时, $S_2 = I$, 这个群记作 C_i (I 例如, $BrCHCl-CHClBr$ 图 5.1(a), $HOOO-COOH$ 图 5.1(b), 聚乳酸, 草酸二酯, 反丁二酸, $Pd(NO_2)_4$ (例如在 $K_2Pd(NO_2)_6$ 晶体中) 等属于 C_i 点群。当 n 为奇数时, S_n 群就是 C_n 群。

(3) C_{nh}

若分子有一个 n 重旋转轴和一个垂直于旋转轴的镜面(水平镜面),就得到 C_{nh} 群,这是一个交换群,子群 C_n 和 C_i 的元素彼此互易,所以 C_{nh} 可看成是 C_n 和 C_i 的直积, $C_{nh} = C_n \otimes C_i$, 有 $2n$ 个对称操作,分为 $2n$ 类

$$E, C_n, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, \sigma, \sigma C_n, \sigma C_n^2, \dots, \sigma C_n^{n-1}$$

属于这种点群的分子如 $1,1$ -二氯乙烷, 臭代苯, 反式 1,2-二氯乙烯, 反式丁烯 (C_{2h}), $C(NH_2)_2$ 。

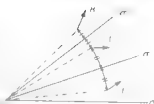
当 $n=1$ 时,就是只有一个对称面,记作 C_s (σ) 类,例如 $NBrO$, HNO , $HOCl$, HN_3 , $CHClF_2$ 等。

(4) C_{∞}

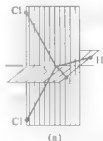
若分子有一个 n 重旋转轴和通过 C_n 轴的镜面,就得到 C_{∞} 群。由于 n 重旋转轴的存在,有一个对称面必然要带来其他($n-1$)个对称面,两个平面的交角为 $1/2 \cdot 2\pi/n$ 。当 n 为奇数时,这是显然的。当 n 为偶数时,乍看似乎还有 $n/2$ 个对称面 σ ,相邻两镜面的交角为 π/n 。当 n 为偶数时,出现反射操作(σ)和 $C_{n/2}$ 对称中心,但事实上不存在 $C_{n/2}$ 和 σ ,这是因为

存在 $n/2$ 个 C_2 轴,一个镜面 σ , σ 和 C_2 轴垂直,从图5.3(a)中可以看出,用 C_2 操作(C_2)和 σ 轴经过 σ 反映 $E = 1$,而 A 和 A' 对于 σ 互为镜像,由 σ 反映过来看, A 和 A' 重合,存在交角为 π/n 的 n 个对称面,因此 n 重旋转,也就是两个垂直的 C_2 轴为 C_{∞} 群,所以 C_{∞} 群的对称操作为 $E, C_2, C_2^2, \dots, C_2^{n-1}, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}$ 共有 $2n$ 个操作。

C_{∞} 是双向轴, C_{∞} 和 $C_{\infty}^{(2)}$ 属于同一类。因此,当 n 为奇数时, $2n$ 个元素分为 $(n+3)/2$ 类(所有 σ 属于同一类);当 n 为偶数时,分为 $(n+6)/2$ 类(σ 和 σ' 分属于两个类);属于这类点群的分子如 CH_2Cl_2 [图5.3(a)], H_2O , Cl_2O , O_3 , HCHO ,船式构象环己烷(C_{2v}), CH_3Cl [图5.3(b)], BrF_3 , F_3 , PF_5 , NH_3 , CHCl_3 及三氯乙烷(C_{2v})等。

图 5.3 (a) C_{∞} 群

(c) 轴垂直于平面



(a)



(b)

(5) C_{∞} , $C_{\infty}^{(2)}$

这是(4)中 $n = \infty$ 时的情况,对称双轴 C_{∞} 和 $C_{\infty}^{(2)}$ 反映分子对称元素除了 C_{∞} 轴外,还有 n 个垂直于 C_{∞} 轴的 C_2 轴,或 $C_{\infty}^{(2)}$ 轴,如 H_2O , H_2O_2 等。

以上就把只有一个旋转轴的情况讨论清楚了。

2. 双面(二面体)群 D_n 。

如果分子除一个 n 重旋转轴(C_n)之外,还有另外 n 个垂直于 C_n 轴的一重旋转轴,就属于双面群 D_n 。一重旋转轴 C_2 垂直于 C_n 轴,占上就只有一个高于一重的旋转轴。一重旋转轴(C_2) n 个时,这是显然的。因为一重轴把 n 重轴移到另外位置,该处原来也必定有一个高于一重轴。即使 n 重轴是垂直的,也是如此。设另一个一重轴和 n 重轴交角为 α , $\alpha = \pi/n$,则必定还有一个 C_2 轴和 n 重轴相交为 2α 的旋转轴。由这个二重轴又带出另一个, ..., 如图5.4所示。

最后看共有 n 个一重轴,必须满足 $\alpha = \pi/n$ 的要求,所以垂直于这些一重轴必然有

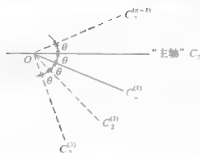


图 5.4 不互相垂直的 n 重轴
产生高重旋转轴



图 5.5 由 C_4 和 C_2 轴产生 C_2 轴
(C_4 轴垂直纸面)

个 n 重轴。这说 C_n 原来是 n 重轴为主轴不互相垂直的 C_2 轴若有 $n/2$ 个 C_2 轴, 必然需求另外 $n/2 - 1$ 个 C_2 轴, 相邻两个 C_2 重轴的上角 $\theta = \pi/n$ (当 n 为奇数时, 这是不可能的, 当 n 为偶数时, 直接看母轴有 $n/2 - 1$ 个 C_2 轴, 根据旋转乘积的定理, 会不同轴相继进行的两次旋转, 如果旋转轴相交于一点 O , 且 $\theta + \theta$ 改为了 θ 旋转, 它的旋转也是 C_2 轴, 从而做 C_2 定理, C_2 轴和 C_2 轴相乘产生另外 $n/2 - 1$ 个 C_2 个重轴, 两组 C_2 轴互为分角线, 呈 D_n 的情况为妙。这 D_n 。

所以 D_n 群有 n 个操作 $E, C_2, C_2, \dots, C_2, C_2, \dots, C_2, C_2, \dots, C_2$ (n 为偶数轴, 当 n 为奇数时, 所有 C_2 操作属于同一类, n 个操作分为 $n/2$ 类, 当 n 为偶数时, C_2 操作分为两类, n 个操作分为 $n/2 + 1$ 类 E 和 C_2 轴, 属于 D_n 群的 C_2 轴组成的乙烷、乙烷构型的乙烷、反式 $C_2H_2N_2$ ($C_2H_2N_2$) 在 $K(C_2H_2N_2)$ 晶体中, 不算 H, D_n) 等。

3. 立方体群

当有多个 C_4, C_2 轴时, 可能实现哪群对称性, 考虑时合先, 假设有 n 个高重旋转轴, 选取其中两个夹角最小者, 例如, 分别是 C_4 和 C_2 轴, 以两个轴的交点为球心作球面, 分别与这两个旋转轴相交于 A, B 点, 若绕 OA 轴作 C_4 (C_2) 旋转, B 点移动, 是 OB 轴被移置 n 个方向, 设它们与球面的交点为 $B, B', B'', \dots, B^{(n-1)}$ 同样, 如果绕 OB 轴作 C_4 (C_2) 旋转, A 点移动, 是 OA 轴被移置 m 个方向, 设它们与球面交点为 $A, A', A'', \dots, A^{(m-1)}$ 。若再用某一个 OA 为轴作 C_4 旋转, 则这个 OA 轴周围必然又均匀围着 n 个 OB 轴。同样, 每个 OB 轴周围也必然均匀围着 m 个 OA 轴。

如果用通过球心的平面在球面上, 以 A, B 点为弧把相邻的 B 点连接起来, 就可得到球面上凸 n 边形, 其中心是 OA 轴, 球面必然被若干个这种正凸 n 边形所充满, 否则将有

此 C_n 轴不能通过绕 C_1 轴作 C_n 旋转操作, 故可假设的前提于是, 若把所有互相邻近的 n 个点都用直线连接起来, 我们将得到一个内接于球面的正 n 边形, 以该图式的正 n 点多面体, 它的顶角将是 m 个面围成的, 因为通过每个正 n 边形的中心有一个 C_n 轴, 而且, 沿着一个 C_n 轴, 最邻近的 C_n 轴有 m 支。显然, 正 n 点多面体的各面、各棱、各个顶点分别相互等价。图 5.6 表示 $n=5, m=3$ 的情况。

n 和 m 要满足一定条件才能构成正 n 点多面体, 即成立正 n 点多面体的条件是 $m \leq n$ 且 n 边形的顶角 α 和为

$$\alpha = m(n-2)\pi/n,$$

如果 α 成钝角, 必须 $\alpha < \pi$, 能满足这种条件的 m 和 n 的组合只有 1 种 (表 5.1)

表 5.1

| n | m | 正 n 多边形的形状 |
|-----|-----|--------------|
| 3 | 3 | 正四面体 |
| 3 | 4 | 正八面体 |
| 3 | 5 | 正(二角)二十面体 |
| 4 | 3 | 立方体 |
| 5 | 3 | 正(五角)十二面体 |

这样我们就得到了正四面体以上高对称性的分子, 其对称轴系必与某一个正 n 点多面体有相同, 有能够存在的满足对称性条件的正 n 点多面体只有这五种 (图 5.7) 下面分别讨论。

(1) 正四面体群

1. T 检查正四面体 (图 5.8) 时, 可找出它的 13 个旋转轴系, 计有: 四个通过它的 C_2 轴, 和相对着的平面中心的 C_3 轴, 三个互相正交的 (通过不相邻的两条棱中点的) C_2 轴, 所以它有十二个旋转操作:

$$\{E, 4C_3, 4C_2^2, 3C_2\},$$

这些对称操作构成了 T 群。二重轴是单重轴, 但各二重轴和二重轴可以通过对称操作各互换位置, 所以它们的相同对称操作为: 恒等、三分四类。新戊烷 ($C(CH_3)_4$) 分子中, 甲基不处于最高的对称位置 (旋转角 $\neq 0$), 则属于 T 群 (图 5.9)。

在 T 群分子无对称面时, 为了保持分子原有的旋转轴, 它只能垂直于一个二重轴 (同时也就通过另外两个二重轴), 或者通过二重轴且与另外两个二重轴的夹角

(2) T_d : 当对称面垂直于一个二重轴时, 对称面一定有一个 C_2 轴。

$$\{C_2, \sigma, S_6, I, C_3, C_4\}$$

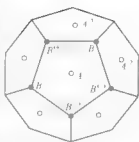


图 5.6 正 n 点多面体
和五重轴的情况

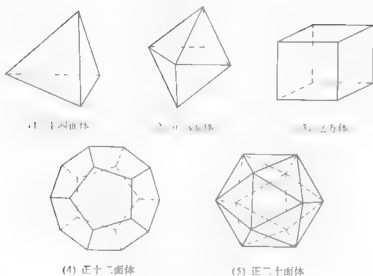


图 5.7 五种正多面体

有对称中心。反射操作与任何操作均可与自身交换,即 $\sigma\sigma = I$ 。视 I 和 σ 为 I 和 σ 的共轭, $I = I^{-1}$ 、 $\sigma = \sigma^{-1}$ 。

由此得知它的对称操作共有 24 个,分 8 类:

$$\{E, 4C_3, 4C_3^2, 3C_2, I, 4IC_2 = 4S_6, 4IC_3^2 = 4S_6, 3IC_2 = 3\sigma_h\}.$$

这些(24)个操作在(24)个晶体点群为 T_d 群(例子)

I ——对称的 σ 也——, 三轴相互垂直, 每轴一个二重轴, 得到 I 的图(图 5.8), σ 有一个 C_2 , 它由一个二重轴与角正通过一个二重轴的对称面存在, 这个二重轴转化为四重轴, 显然有一个是双轴 σ 通过 C_2 , 也使 C_2 变成双轴, 所以 T_d 群的 24 个对称操作分为五类:

$$E, C_3, C_2, C_3^2, \sigma, \sigma_h, \sigma_d, \sigma_d'$$

T_d 群完全反映了一个正四面体的对称性, 它与置换群 S_4 同构。属于 T_d 群的分子很多, 如 CH_4 , CCl_4 , NH_3 , NCl_3 , PCH_3 , PCl_3 , SF_6 , PF_5 , PBr_5 等。

甲基 $-\text{CH}_3$ 处于最高对称位置时, $\text{Si}(\text{CH}_3)_4$, $\text{C}(\text{CH}_3)_4$ 等分子也属于 T_d 点群。

(2) 正八面体群

从图 5.9 可见, 正八面体上, 其旋转轴系共有: 一个四重轴, 分别通过相对的两个顶点; 三个二重轴, 分别通过相对的两边的中点; 四个三重轴, 分别通过相对的两个面的中心。由这些对称元素的对称操作构成的群称为 O_h 群, 共有 48 个对称操作。

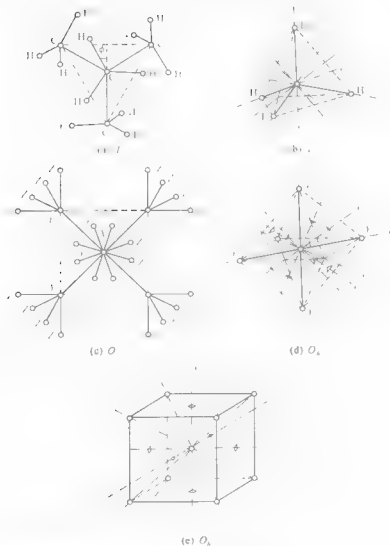


图 5.8 立方体群的对称元素图

它的对称轴都是 C_4 轴, 所以对称轴有 6 条:

$$\{E, 6C_4, 3C_4^2 = 3C_2, 6C_2', 8C_3\}.$$

实际存在的分子对称群中,旋转轴(的阶数)只取几个数值(除 $n \rightarrow \infty$ 的特例之 ∞ 、单轴群和双轴群), n 取值 $2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20$ 和 ∞ 就很少碰到了,当有多个高重旋转轴时, n 只取值 $2, 3$ 或 4 。

§ 5.2 空间的对称性

我们首先直观地描述一下对称性。如果在有限几何形体的所有对称操作中,至少有一个不为单位操作的对称操作构成一个群,则称该形体具有对称性。对称操作的概念及相应乘法的定义在前面已经叙述过了。

以任意几何形体为例,建立坐标系,所有保持该几何体几何长度不变的对称变换集合构成一个点群,它由下列对称操作构成:恒等、反演、旋转、反映、映转。

设几何形体在 x, y, z 轴上坐标为 (x, y, z) ,用 x', y', z' 表示 (x, y, z) 经对称操作后的坐标,或用列矩阵表示,试用 3×3 矩阵 $\{a_{\mu\nu}\}$ 表示三维定点转动,即

$$\begin{aligned} x'_1 &= [a_{11} \ a_{12} \ a_{13}] [x_1 \\ x'_2 &= [a_{21} \ a_{22} \ a_{23}] [x_2 \\ x'_3] &= [a_{31} \ a_{32} \ a_{33}] [x_3 \\ x'_\mu &= a_{\mu\nu} x_\nu (\mu, \nu = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (2.1)$$

几何长度不变,即

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ \sum_{\nu=1}^3 \delta_{\nu\nu} x_\nu x_\nu &= \sum_{\nu=1}^3 a_{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_\nu x_\nu, \end{aligned}$$

对比两边,得到

$$\sum_{\mu} a_{\mu\nu} a_{\mu\sigma} = \delta_{\nu\sigma} \Rightarrow \bar{a}_{\nu\mu} a_{\mu\sigma} = (\bar{A}A)_{\nu\sigma} = \delta_{\nu\sigma},$$

用矩阵表示,式(2.1)可写为 $[x'] = [A][x]$,由式(2.1)可知,3维转动集合 A 是一个 $O(3)$ 群。由 $[x] = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$,由 $[x'] = [x'_1 \ x'_2 \ x'_3]^T$,若 A 仅包含纯转动元素的 A 群称为第一类点群,由 A 加上反演 i 构成的 $A + i$ 称为第二类点群。

如果将固定点条件放弃,(2.1)式推广到下式

$$\begin{aligned} x'_1] &= [a_{11} \ a_{12} \ a_{13}] [x_1 \\ &\quad [a_{21} \ a_{22} \ a_{23}] [x_2] + [b_1 \\ x'_3] &= [a_{31} \ a_{32} \ a_{33}] [x_3] + [b_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

它表示空间一般操作。若 $b_1 = b_2 = b_3 = 0$,式(2.2)中 $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1, a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$,则表示绕第三轴的转动,并沿此轴平移 b_3 ,这种操作叫螺旋转动。若所有的 $a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$,则

表示平面平移操作,此类操作可视为螺旋轴转动特征——螺旋转动含纯转动元素,称为第二类操作,见图 10-10。

若(2.2)式简化为

$$\begin{aligned} x'_1 &= [1 \ 0 \ 0] [x_1] + b_1 \\ x'_2 &= [0 \ 1 \ 0] [x_2] + b_2 \\ x'_3 &= [0 \ 0 \ -1] [x_3] + 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$



由(2.3)式可知,相应操作称为第二类操作,式表示为

x_1 - x_2 平面反映并沿 x_1 - x_2 平面有平移(b_1, b_2)。

当上式变为

$$\begin{aligned} x'_1 &= \cos \alpha \ x_1 - \sin \alpha \ x_2 \\ x'_2 &= \sin \alpha \ x_1 + \cos \alpha \ x_2 \\ x'_3 &= -x_3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

即,对 x_1 - x_2 轴转动,角,并对 x_3 轴进行反映,这种操作称为转动反映,也是第二类操作。上式中, $\alpha = 0, \pi$ 表示 x_1 - x_2 轴转动,当 $\alpha = 0$ 时,转动角为 0 , 反映操作变为 x_3 轴转动,角,相对 x_1 - x_2 轴,反映,称为转动反映。

由以上讨论可知,操作可分为两大类:螺旋转动(包含平移+轴转动)和点群(不含平移),其余属第二类操作。

因此空间操作有 8 种:

(1) 反演(相对于对称中心)—— i ,

(2) 反映(相对于映面 m)—— $\sigma(m)$,

(3) 旋转(相对于转轴 n)—— $C(n, \alpha)$,

(4) 旋转反演—— $iC(n, \alpha)$,

(5) 旋转反映—— $S(n, \alpha) = \sigma(n)C(n, \alpha) = iC(n, \alpha + \pi)$,

(6) 螺旋—— $iC(n, \alpha) + b$, 其中 α 表示对 n 轴转动, b 表示沿 n 轴平移,相当于 (b_1, b_2, b_3) 。

(7) 平移反映—— $i(\alpha|t)$,

(8) 螺旋旋转—— $(\alpha|t) + C(n, \alpha)$ 。

其中前一种是点群,在这 8 种操作中只有转动为第二类操作,其余为第一类操作。

在转动中,对于晶体受到晶格周期性的限制,转角只能是 $\frac{2\pi}{n}$, 其中整数 $n = 1, 2, 3, \dots$, 当 $n = 2, 3, \dots$ 时,分别把转轴 n 称为二重、三重等轴,相应转动记为 C_2, C_3, \dots, C_n 。

在镜面反映中,反射面与*C*₂轴垂直记为σ_v,反射面通过转轴*C*₂者记为σ_d。如果σ_v为独立元素,则*C*₂σ_v=*E*,其*E*的反映中心为转轴与映射面σ相交的点。同样,*C*₂σ_d=*S*(*n*),(*C*₂σ_d)²=(*S*(*n*))²,等等。

其中点操作有如下运算性质:

$$i^2 = I (\text{恒等操作}),$$

$$\sigma(m)^2 = I,$$

$$\sigma(m_1)\sigma(m_2) = C(m_1 \times m_2, 2\varphi(m_1, m_2)),$$

其中φ为法线*m*₁与*m*₂的夹角,显然

$$i\sigma(m) = C(m, \pi),$$

$$C(n, \beta) \circ C(n, \alpha) = C(n, \alpha + \beta),$$

$$C(n_1, \alpha) \circ C(n_2, \beta) = C(n_3, \gamma),$$

其中 $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ 和 $\frac{\gamma}{n_3}$ 与*n*, *n*₁, *n*₂, *n*₃在单位球面上形成球面三角形的内角,此外还有

$$ig = gi (g \text{ 为任意操作}),$$

$$g^{-1}\sigma(m)g = \sigma(gm),$$

$$g^{-1}C(n, \alpha)g = C(\pm gn, \alpha).$$

关于点群共轭类的划分,前面已介绍一种判另方法,现进一步讨论如下。

(1) 关于不同转轴*C*₁与*C*₂的转动元素是否对易,如果存在*C*₁轴与垂直于*C*₂的阶轴*C*₂,则必存在*E*个垂直于*C*₂的*C*₂轴。有鉴于此,若存在另一个转轴*C*₃(可能与*C*₁有一定交角),则由乘法的封闭性,有

$$(C_1^n)^{-1}C_2^mC_1^n \equiv C_2^k \in G,$$

即在群*G*中存在等价的转轴*C*₂,而且由于*C*₁=*E*, *C*₁², *C*₁³, ..., *C*₁^{*m*-1},会产生*m*条*n*阶等价轴。相对于这些等价转轴的相同转动元素均属同一共轭类。反之,*C*₂轴也会产生*E*个等价的*n*条转轴,相对这些转轴的相同转动元素亦属同一类。

其中一个特例是*C*₂^{*n*}为与*C*₂轴垂直的*C*₂^{*n*}轴,则

$$(C_2^n)^{-1}C_2^mC_2^n = C_2^{-k}(C_2^k),$$

注意到*C*₂^{*n*}=*C*₂^{*n*-1},得*C*₂^{*n*}⁻¹=*C*₂^{*n*},可见*C*₂^{*n*}与*C*₂轴垂直,但反向(转动反向),这样的轴叫双向轴。

(2) 关于不同反射面的反射元素的共轭元,若反射面σ_v垂直于转轴*C*₂,则对于

$$C_2^k\sigma_k = \sigma_kC_2^k,$$

此时不会产生新的共轭元,若反射面σ通过*C*₂轴,则对于σ=*E*^{*n*},且*E*与所有操作元素对易,应有

$$\sigma_k^{-1}C_2^k\sigma_k = \sigma_kC_2^k\sigma_k = C_2^kC_2^k = C_2^k,$$

亦即 C_n 轴成为双向轴. 若既不存在 C_2 垂直 C_n 又不存在通过它的反射面 σ , 则转轴 C_n 为单向轴.

注意, 当存在通过 C_n 轴的反射面 σ 时, 则必存在 n 个通过转轴的等价反射面. 事实上,

$$(C_n)^{-1} \sigma C_n = \sigma'_i,$$

若 $i = 1, 2, \dots, n$, 分别产生 n 个等价反射面.

我们一般称转轴 C_n 为 n 次轴. 一次轴 C_2 和等变轴, 在晶体点群中, 由于空间周期性结构, 只存在一次、二次、三次、四次、六次轴. 这里, 我们只讲这一点.

问题 5.2

设 C_2 与 C_3 相交 O 点的两个转轴 C_2 与 C_3 夹角为 α , C_2 轴垂直于 C_3 与 C_3 垂直的平面, 则有关系 $C_3 C_2 C_3^{-1} = C_2^{-1}$. 试求 C_6 轴转动 C_6 的表示.

提示: 设 i 为 C_2 轴, j 轴平行于 C_3 轴, 用矩阵表示, $C_3 = i + j + k$, $C_2 = i - j - k$, $\cos \pi$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ u - jj - kk = 2i - E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, i_B = i \cos \theta + j \sin \theta, \end{aligned}$$

类似于上式有 $C_{2B} = 2i_B i_B - \bar{E}$ ($\bar{E} = \vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}$),

$$\begin{aligned} C_{2B} C_{2A} r &= [2i_B i_B - \bar{E}][2(i i - \bar{E})r] \\ &= r + 4i_B(i_B i) (ir) - 2i_B(i_B i) - 2i(ir) \\ &= i(x \cos 2\theta - y \sin 2\theta) + j(y \cos 2\theta + x \sin 2\theta) + k z. \end{aligned}$$

但用并矢表示的绕 Oz 轴转动 φ 的操作是

$$\begin{aligned} C_6(\varphi) &= kk + (ii + jj) \cos \varphi + \bar{E} \times k \sin \varphi, \\ C_6 \cdot r &= i(x \cos \varphi - y \sin \varphi) + j(y \cos \varphi + x \sin \varphi) + k z. \end{aligned}$$

证明: 对 i 与 j 轴上的两个反射 σ_A 与 σ_B 的乘积, 等价于绕两平面交线的转动, 转角等于两平面交角的两倍, 即 $\sigma_A \sigma_B = C(2\varphi_{AB})$.

提示: 设两平面的法线向量 $n_A = i \cos \varphi + j \sin \varphi$, $n_B = -i \sin \varphi + j \cos \varphi$, 则

$$\begin{aligned} \sigma_A - \bar{E} - 2n_A \cdot n_A, \sigma_B &= \bar{E} - 2n_B \cdot n_B, \\ \sigma_A(\sigma_B r) &= i(x \cos 2\theta - y \sin 2\theta) + j(y \cos 2\theta + x \sin 2\theta) + k z, \end{aligned}$$

此外, 交线单位矢为 k , $(i, k) = k \cos \varphi$, $(j, k) = k \sin \varphi$,

$$C(k)r = i(x \cos \varphi - y \sin \varphi) + j(y \cos \varphi + x \sin \varphi) + k z.$$

证明: 一个转动 φ 的操作, 通过转轴 k 的反射 σ 的乘积, 等于过该轴的另平面 B 的反射 σ_B , A 与 B 的夹角为 $\varphi/2$.

提示:令转轴 $n = i$, 则 $C(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, 令 n 轴

法向 $n_A = j$, 则 $\sigma_A = \bar{E} - 2jj = ii + kk - jj$.

$$C(\varphi)r = ix + (jy + kz)\cos\varphi + [-jx + ky]\sin\varphi,$$

$$\sigma_A = [C(\varphi)r] = ix - k(x\cos\varphi + y\sin\varphi) - j(y\cos\varphi - z\sin\varphi).$$

设 n_B 与 y 轴夹角为 θ , 则 $n_B = j\cos\theta + k\sin\theta$,

$$\sigma_B = \bar{E} - 2n_B n_B = ii + 2(j\cos\theta + k\sin\theta)(j\cos\theta + k\sin\theta)$$

$$= (ii + jj + kk) - 2(j\cos\theta + k\sin\theta)(j\cos\theta + k\sin\theta)$$

$$= ii - j j \cos 2\theta - (jk + kj) \sin 2\theta + kk \cos 2\theta,$$

$$\sigma_B r = ix - j(y\cos 2\theta + z\sin 2\theta) + k(x\cos 2\theta - y\sin 2\theta).$$

当 $\theta = -\varphi/L$ 时, $\sigma_B = \sigma_A C(\varphi)$.]

若直循环转动群中有 L 种对合操作,即在 C_L 中, $C_L^2, C_L^4, \dots, C_L^{L/2}$ 则在包含两个或两个以上转轴,对合操作中各次转动数 L 之公有关系 $n = L/2, n = L/4, \dots$

提示:群有 n 个不等价不可约表示,当然有群的特征标 $\chi = 1 + n_1 + n_2 + \dots + n_r$,其中各子群的特征标元素和特征标表示 $\chi = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_r$,子群 C_2 的特征标表示 $\chi = n_1 + n_2 + \dots + n_r$,从中,每个表示矩阵只有一个对角元为 1,其余对角元为零,可以用并矢表为 nnn .由此

$$\sum_{n_i \in C_2} \text{Tr}[\Gamma^{nnn}(g_i)] = 3 + (2-3)n_2 + (3-3)n_3 + (4-3)n_4 + (6-3)n_6,$$

但 $\sum_{n_i \in C_2} \chi_i = 0$, 故 $\sum_{n_i \in C_2} \chi_i$ 是其转轴可表示的, $\sum_{n_i \in C_2} \chi_i$

或用球坐标,绕 n 轴任意轴转动 φ 的表达式,见图 5.11.

[提示:设转轴 n 的方向余弦为 l, m, n , 其中 $l = \sin\theta\cos\varphi, m = \sin\theta\sin\varphi, n = \cos\theta$. $P(x, y, z)$ 为空间任一点,绕 n 轴转动 ψ 到 $P' = (x', y', z')$. 用符号表示:

$\xrightarrow{R} P' = r'$, 或

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \Gamma(\psi, n) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

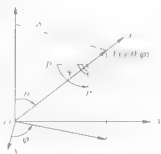


图 5.11

但绕 n 轴的转动 φ 相当于先将 n 轴移到 Oz 轴, 记为 Γ_1 , 绕 Oz 轴转动 φ , 然后将转轴转回 n 轴, 即

$$\Gamma(\psi, n) = \Gamma_1^{-1} \Gamma(\psi, k) \Gamma_1.$$

此外, $\Gamma(\psi)$ 又可分为两次操作: 先绕 Oz 轴绕 θ , 再绕 Ox 轴绕 φ , 则得 n 轴转到 Oz 轴

$$\begin{aligned}\Gamma_* &= \Gamma(\theta, j)\Gamma(-\varphi, k) \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

易得

$$\begin{aligned}\Gamma &= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix} \\ \Gamma(\psi, k) &= \begin{vmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

结果

$$\Gamma(\psi, n) = \Gamma_*^{-1}\Gamma(\psi, k)\Gamma_*$$

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} \cos\psi + l^2(1 - \cos\psi) & lm(1 - \cos\psi) - n\sin\psi & ln(1 - \cos\psi) + m\sin\psi \\ lm(1 - \cos\psi) + n\sin\psi & \cos\psi + m^2(1 - \cos\psi) & mn(1 - \cos\psi) - l\sin\psi \\ ln(1 - \cos\psi) - m\sin\psi & mn(1 - \cos\psi) + l\sin\psi & \cos\psi + n^2(1 - \cos\psi) \end{vmatrix} \\ & \text{式(1)用矩阵表达式 } \Gamma(\psi, n) = \begin{pmatrix} l & m & n \\ m & n & l \end{pmatrix} \Gamma(\psi, k) \begin{pmatrix} l & m & n \\ m & n & l \end{pmatrix}^{-1} \text{ 等效}\end{aligned}$$

§ 5.3 晶格的对称性

晶体结构的基本特征是, 构成它的原子或离子、原子团在空间呈现周期性排列, 构成所谓的晶格. 周期性条件使晶格的对称操作均离散化, 不存在连续群中的无穷小操作元素.

1. 平移对称

l 为晶格矢量. 晶体的最小基元单元 Ω 是晶体的一个不共面的棱称为晶格基矢, 记为 a_1, a_2 与 a_3 . 晶格矢量 l 之可表示为晶格基矢的线性组合,

$$l = \sum_{i=1}^3 l_i a_i = l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3,$$

其中 l_1, l_2, l_3 应为正整数. 对于晶格, 在平移变换 $T(l)$ 下,

$$r \rightarrow r' = T(l) = r + l,$$

具有不变性,所有 $\{T\}$ 集合构成基本平移群,又晶格的格群,平移矢量 T 的集合 T 生成三维晶体点阵,即布拉菲点阵。布拉菲点阵是基本平移操作在几何表现,晶格点阵则是晶格粒子的实际分布。晶格点阵可以是一个布拉菲点阵,也可能由多个相同的布拉菲点阵套构而成。例如 NaCl 的晶格点阵就是由氯离子和钠离子分别构成的面心立方布拉菲格子套构而成的。

2. 晶格的一般对称

将保持晶格不变性的所有对称操作记为 $\kappa(R, \alpha)$,

$$r \rightarrow r' = g(R, \alpha)r = Rr + \sum_{i=1}^3 a_i a_i,$$

其中 R 为 $O(3)$ 变换, a_i 为 \mathbb{R} 实数,其整数部分为 l_i , 且

$$a_i = l_i + t_i (0 \leq t_i \leq 1) (i = 1, 2, 3),$$

即 $g(R, \alpha) = T(t)g(R, t)$,

当 $\alpha = 0$ 时, $\kappa(R, \alpha)$ 表示转动与反射, 当 $R = I$, α 必须取整数, 表示平移变换, $\kappa(I, t) = T(t)$, 相继两次操作定义为它们的乘积, 即

$$g(R, \alpha)g(R', \alpha') = g(R \cdot R', \alpha + R\alpha').$$

$\kappa(R, \alpha)$ 的逆元素是 $\kappa(R^{-1}, -R\alpha)$, 有单位元素为 $\kappa(I, 0)$, 显然, 所有晶格对称操作集合 $\kappa(R, \alpha)$ 满足群的四公理。这样构成的晶格对称群称为空间群, 记为 \mathcal{G} , 述晶格群 $T(I)$ 可称为群 \mathcal{G} 的正规子群, 且陪集元素可以表示为 $T(t)$ 。

由于 $\kappa(R, t)$ 中的 R^{-1} 有一一对应的关系, 故平移群的陪集集合 (包括平移群) 与 $O(3)$ 的变换有一一对应关系, 这样的 $O(3)$ 子群称为晶格点群, 简称点群, 记为 G 。一般说来, 集合 $\kappa(R, \alpha)$ 并不构成群, 点群亦非点阵群的子群。只有当 $t = 0$, $\kappa(R, \alpha) = R$ 时, 点群才是空间群的子群。这种空间称为简单点群。

3. 周期性条件对实正交变换 R 的限制

由于平移群元 $T(t)$ 的共轭元 $\kappa(R, \alpha) = T(t) \kappa(R, t) = \kappa(I, t) = T(t)$ (其中 I 为 $O(3)$ 的变换), 因此平移群是空间群的不变子群。

设 e_i 为 \mathbb{R}^3 基矢组, 则有 $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, $\alpha, b = 1, 2, 3$ 。实正交变换矩阵元 $T(R) = e_i \cdot R e_j = \delta_{ij} R_{ij}$ 变换, $t = (t_1, t_2, t_3)$ 为基矢组, 且令

$\sum_{i=1}^3 X_{ij} t_j$ ($i = 1, 2, 3$), 显然实矩阵 X 为 \mathbb{R}^3 的, 即 $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 。引入倒格基矢 a_i ($i = 1, 2,$

$$3), b_i = \sum_{a=1}^3 (X^{-1})_{ia} e_a, \text{ 有}$$

在晶体对称变换 $g(R, t)$ 中, 有保持不变的点(不动点)、保持不变的直线和平面, 分别称为对称中心、对称轴和对称平面。对这些对称元的讨论, 也有许多好的结果。

问题 5.3

证明: 平移群 $T(\mathbf{r})$ 是空间群 $K(R, \mathbf{r})$ 的不变子群。

· 证明: 对于给定的晶格和选定的晶格基矢, $\forall k \in K, t \in T$, 其中 K 与 T 有一一对应关系。

提示: 设 $k \in K, t_1, t_2 \in T$, 则 $k \in K, t = t_1 t_2 \in T$, $I(k, t) = I(k, t_1 t_2) = I(k, t_1) I(k, t_2) = I(t_1) I(k, t_2) = I(t_1) I(k, t_2) = I(k, t_2) = I(k, t_2) = I(k, t_2) = I(k, t_2)$ 。

· 证明: 若有 σ 面垂直于 C_n 轴, 则 C_n 轴为 C_n 轴。

[提示: 令 $\sigma_n = C_n^2$, C_n 垂直于 σ_n 面, 也垂直于 C_n 轴, 故

$$\sigma_n^{-1} C_n^2 \sigma_n = i C_n^2 C_n^2 i = i C_n^{-2} i = C_n^{-2}.]$$

· 在直角坐标系中, 绕 z 轴转动 $2\pi/n$ 轴 n 次固有转动和非固有循环点群的生成元的矩阵形式和并矢形式, 并计算 {3} 和 {4}。

· 并矢计算绕 z 轴 C_n 轴 n 次固有转动 C_n 的矩阵, $C_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) \\ 0 & -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$ 。

§ 5.4 点群

第一类点群不包括反轴元素, 也称固有群。固有循环点群 C_n ($n=1, 2, 3, 4, 6$) 称为高轴群, 第二类点群分类与高次轴关系极大。

1. 固有循环点群 C_n

C_n 群又称单轴点群 $\forall C_n \in C_n$ ($n=1, 2, 3, 4, 6$) 都相互对易, 故 C_n 群为阿贝尔群。具有 n 个群元, 为一个单类, 有 n 个不等价不可约的一维表示。在分子物理中, 一般的线性桥状分子, 可用 C_n ($n=1, 2, 3, 4, 6$) 描述, 但 C_n 轴为微小转动, 分子构型依然重合, 此时分子链的方向即转轴方向。

实际上, C_n 就是特殊正交群 $SO(n)$ 。对于晶体对称群 S , 由于周期性结构的限制, 已经证明只可能存在 $n=1, 2, 3, 4, 6$ 五种情况。我们讨论 n 次转动轴的数目的关系 $n=3+3n_4$ (至少有两个轴不重合)。

2. D_n 群

D_n 群即高次轴不多于一个的多轴点群。此时群必包含 C_n , 且 C_n 轴必垂直于 C_2 轴,

见图 5.13. 否则, 如果是斜交, 则

$$C_2 C_2^A C_2 = C_n^k,$$

必存在等价轴不属于所讨论的范围 ($k \neq 1$ 及垂直问题中已知),

$$C_2(B)C_2(A) = C(c, 2\varphi) \Rightarrow C_2(A) = C_2(B)C(c, 2\varphi),$$

令 $C(c, 2\varphi) = C_n^k (k=1, \dots, n-1)$, 即产生 $(n-1)$ 个 $C(c, 2\varphi)$ ($C(B)C_2$ 轴) 换 C_2 之, 如图 5.13 所示, D_n 群即是由 n 条 C_2 轴, n 条 C_n 轴 (均垂直于 C_n 轴) 构成的第一类点群, 其中 n 条 C_2 轴均垂直于 C_n , 可表为

$$C_2 = C_n^{-1} C_2^{(i)} C_n,$$

共有 $C_2^{(0)}, C_2^{(1)}, \dots, C_2^{(n-1)}$, 其中 $C_2^{(i)}$ 与 $C_2^{(j)}$ 表示任两个 C_2 轴 (相邻 C_2 轴夹角为 $\frac{\pi}{n}$), C_n 轴由于有垂直于它的 n 个 C_2 轴, 故应为双向轴, D_n 群共有 $2n$ 个元素.

当 n 为奇数时, n 个 C_2 轴构成一组彼此等价的轴, 即

$$\{C_2^{(1)}, \dots, C_2^{(n)}\} \equiv n\{C_2\}$$

构成一个共轭类. 当 n 为偶数时, n 个 C_2 轴分为两个共轭类, 由于 n 为双向轴, 故 $\{C_n^k, C_n^{-k} (k=1, 2, \dots, (n-1)/2)\}$ 为一类.

当 n 为奇数时, $2n$ 个元素构成的 D_n 群, 其共轭类个数为 $(n+5)/2$:

$$E, C_n, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, C_2, C_2^A, \dots, C_2^{n-1}, C_2^B, \dots, C_2^{n-1}$$

$$\text{元素个数} \quad 1 \quad n \quad \left(\frac{n-1}{2}\right) \times 2 \quad \text{总数} = 2n$$

$$\text{类数} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{n-1}{2} \quad \text{总数} = \frac{n+3}{2}$$

当 n 为偶数时, D_n 群有 $\frac{n+6}{2}$ 个共轭类:

$$\{E\}, \{C_2\}, \{C_2^A\}, \{C_2^B, C_2^{n-1}\}, \dots, \{C_2^{(n-1)/2}, C_2^{(n+1)/2}\}, \{C_n^{n/2}\}$$

$$\text{元素个数} \quad 1 \quad \frac{n}{2} \quad \frac{n}{2} \quad 1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \times 2 = (n-2) + 1 = n-1$$

$$\text{类数} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \left(\frac{n}{2} - 1\right) + 1 = \frac{n}{2}$$

其中 $\{C_2\}$ 与 $\{C_2^A\}$ 为两个不等价的二次转动.

在晶体点群中, D_n 的 $n=1, 2, 3, 4, 6$.

D_n 群, 群元素为 1 , 有 2 个互相垂直的 C_2 (C_2^A, C_2^B) 轴, 它们生成第三个 C_2 轴 (C_2).

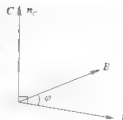


图 5.13

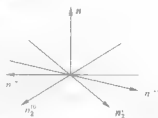


图 5.14

C_2 和 C_3 均垂直 C_2' 和 C_3' 轴, 它们构成一个元素构成的阿贝尔循环群, 属于不可约表示 $A_1 = E, A_2 = E, A_3 = E$ 。该群有 3 个共轭类, 故有 3 个不等价不可约表示。由 $\chi = E = E$, 得 $E = E = E = 1$ 。

D_3 群, 群元素 $g = 6$, 类为 3。有 $l_1 = l_2 = 1, l_3 = 2$, 此群同构于 S_3 群。

D_3 群, 群元素 $g = 6$, 类为 3。如图 5.15 绕主轴 n 转动, 分两类 C_2 和 C_3 类, 两类不等价。绕 C_2 转动, 产生构成 C_2 类, C_3 类与转轴与 n , 即 e 方向, 有两元素 C_2 和 C_3 (其中 C_3 为绕等价转轴 e_2 转动 π)。(C_3) 组的转轴为

$$n_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2),$$

包含 C_2 和 C_3 群有 3 个不同、3 个不同不等价不可约表示。

D_3 群, 有 3 个群元素, 分 3 个共轭类, 但无绕主轴 n 转动的 C_2 类, C_3 类, 两组不等价的二次转动 C_2 和 C_3 , 每组一个元素。

第一组 C_2 的转轴 n_2 为 e 方向, 第二组到转轴与 n ($2 = \frac{1}{2} \times 360^\circ$) 成 30° 角。

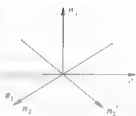


图 5.15 D_3 群转轴

3. T 、 O 和 I 点群

设除 C_3 轴以外, 还存在其他的高次轴与 C_3 相交于一点 O 记 C_4 为与 C_3 轴夹角最小的高次轴, 由

$$C_4^n = C_3^m \quad (n = 1, 2, \dots, m)$$

得到 n 个等价 C_4 轴 (绕 C_4 轴, 夹角相等), O 为中心, 任意半径的球面, 连接 n 个 C_4 轴与球面的交点, 得到球面内接正 n 边形 (轴与球面相交多边形)。

显然在正多边形中再其他转轴 C_2 轴 (正多边形 n 个等价 C_4 轴构成一个 n 多面体, 同样在每个 C_4 轴内, 也有夹角最小的 m 个等价的 C_2 轴, 因此在每个 C_4 轴周围, 亦可构成一个球内接 m 多面体, 这个就是 C_4 轴与球面的交点。高次轴的点群正是描述这种球内接多面体对称性的。群 T 、 O 、 I 轴 C_4 轴 C_3 轴 C_2 轴有几种。

例 5.4.1 $n = 4, m = 3$, 构成球内接立方体, 每个顶角均为 90° , 面 $n = 3$ 且顶角, 这 3 面中每一面都是正四边形。

假说来, 正相等的正 m 边形围成的正多面体, 每个 m 面正顶角是凸顶角, 则 m 个正多边形顶角的总和 φ 满足条件

$$\varphi = \frac{m(n-2)}{n}\pi < 2\pi (n, m \geq 3).$$

由上条件得到如下结果.

(1) 当 $n=3, m=3, \varphi=\pi < 2\pi$,

相应正四面体描述其对称性的点群, 记为 T 群. T 群有 12 个等价轴轴 (C_2, C_3, C_2, C_3), 分别由顶点与其对面中心连线得到. T 群中给以 12 个元素, E, C_2, C_3, C_3^2 同时 4 个 C_2 轴的联合作用, 得到 12 个 C_2 轴. T 群有 12 个元素, 分 1 个共轭类, 有一个三维表示和 1 个三维不可约表示.

(2) 当 $n=4, m=3, \varphi=\frac{3}{2}\pi < 2\pi$,

相应立方体描述的对称点群记为 O 群. 它由立方体各角心联到立方体, 两者具有相同的对称性. 以立方体而论, O 群元素有 24 个, 有 12 个 $C_2, C_3, C_2, C_3, C_4, C_4^3$ 共 12 个元素, 群元分为 5 类:

$$E, 4(C_3, C_3^2), 3(C_2, C_2), 3(C_4^2 = C_2), 6(C_2).$$

其中 C_2 轴为立方体对角线, 有 3 条, C_3 轴为相对面中心的连线 (或沿相邻一条棱的方向), 有 3 条, C_4 轴为沿立方体侧面的对角线方向, 有 6 条, C_2 轴为沿立方体侧面的棱的方向, 有 6 条.

12 个等价的四次轴转动分为两类: C_4 和 C_4^3 . 因此, 在 O 群中, 12 个不等价不可约表示中, 有一个三维表示, 1 个二维表示, 和 3 个一维表示.

(3) 当 $n=3, m=4, \varphi=\frac{4}{3}\pi < 2\pi$,

相应正八面体与立方体有完全相同的对称性. 实际上, 正八面体亦可视为球内接立方体, 其 8 个角心连接起来, 即构成正八面体的 6 个正方形面. 因此立方体与八面体重合的对称操作也能使正八面体重合; 反之亦然. 若记或是正八面体相应的对称群依然是 O 群.

(4) 当 $n=5, m=3, \varphi=\frac{6}{5}\pi < 2\pi$,

相应正三角二十面体, 对称点群记为 I 群. 元素有 60 个, 分为 5 个类:

$$E, 12(C_5, C_5^4), 20(C_3, C_3^2), 15(C_2, C_2), 24(C_2, C_2).$$

其中 15 条等价 C_2 轴, 为相对顶点的连线, 15 条等价 C_3 轴, 为相对正三角面形的连线, 15 条等价的 C_5 轴, 则是相对棱中点的连线.

12 个 C_5 轴转动分为两类: C_5 和 C_5^4 . 因此, 在 I 群中, 60 个不等价不可约表示中, 有 5 个三维表示, 3 个二维表示, 1 个四维表示和 1 个一维表示.

(5) 当 $n=3, m=5, \varphi=\frac{5}{3}\pi < 2\pi$,

相应正三角二十面体, 将正三角二十面体的四心连接起来, 就是正三角二十面

体,显然,描述正二十面体对称性的点群亦为 I 群。

必须强调指出,在一种正多面体点群 I_h 和 I 中,只有 O 群和 T 群才是晶体点群,原因是 I 群包含有在晶体对称性中不存在的 C_5 轴,但在描述分子对称性,如最近发现的 C_{60} 及其衍生物中, I 群却是十分重要的。

为便于了解有关对称操作和对称轴的情况,现将有关多面体的几何元素归纳于表 5.2 中,将有关固有点群群结构归纳于表 5.3 中。

表 5.2 高次轴点群相应多面体的几何结构

| 点群符号 | 名 称 | 表 面 | 顶角数 | 棱边数 |
|------|---------|----------|-----|-----|
| T | 正四面体 | 4 个正三角形 | 4 | 6 |
| O | 立方体 | 6 个正方形 | 8 | 12 |
| O | 正八面体 | 8 个正三角形 | 6 | 12 |
| I | 正五角十二面体 | 12 个正五边形 | 20 | 30 |
| I | 正三角二十面体 | 20 个正三角形 | 12 | 30 |

表 5.3 第一类点群结构简表

| 点群符号 | 阶数 | 旋转轴数 | 不等价不可约表示数 | 分解为 | 指数为 n 的表示数 |
|-------|----|------|-----------|-----------------|--------------|
| C_1 | 1 | 1 | 1 | C_1 | C_1 |
| C_2 | 2 | 2 | 2 | C_2 | C_2 |
| C_3 | 3 | 3 | 3 | C_3 | C_3 |
| C_4 | 4 | 4 | 4 | C_4 | C_4 |
| C_6 | 6 | 6 | 6 | C_6 | C_6 |
| D_2 | 4 | 4 | 4 | C_2, C_2 | C_2, C_2 |
| D_3 | 6 | 3 | 3 | C_3, C_2 | C_3, C_2 |
| D_4 | 8 | 5 | 4 | C_4, C_2 | C_4, C_2 |
| D_6 | 12 | 6 | 6 | C_6, C_2 | C_6, C_2 |
| T | 12 | 4 | 3 | C_3, C_2, C_2 | C_3, C_2 |
| O | 24 | 5 | 6 | C_4, C_3, C_2 | C_4, C_3 |
| I^* | 60 | 15 | 10 | C_5, C_3, C_2 | C_5, C_3 |

* 其中 I 群不属于晶体点群,表中还漏列 6 个 C_5 轴。

4. 第二类点群

第二类点群的表示矩阵行列式值为 -1,就是包括反射元素的旋转点群。基于第一类点群的结构分析,研究第二类点群的结构十分简单。

我们已经知道 $O(C_3) \times O(C_2) = C_3 \times C_2$,其中 E 为恒元, σ 为反射操作。

$O(3) = SO(3) \cup (SO(3) \cup SO(3))$, 其中 $SO(3)$ 即为固有(纯)转动群, $\sigma, R(\sigma)$ 即为 $O(3)$ 的正规子群 $SO(3)$ 的陪集, $SO(3)$ 为 $O(3)$ 的指数为 2 的正规子群, 即第一类点群。

设 G 为第一类点群, 将已知 σ 分解 $G = H \cup \sigma H$, $H \cap \sigma H = \Phi$, 其中集合 H 与 σH 只包含正规(固有)转动。

(1) 当 $\sigma \in G$ 时, 第二类点群称为 I 型第二类点群。

设 $\sigma \in H$, $\sigma \in \sigma H$, 且 $\sigma \neq \sigma$, 乘 $G = H \cup \sigma H$, $H \cap \sigma H = \Phi$, 且 $G = H \cup \sigma H$, 且 $H \cap \sigma H = SO(3)$, $G = H \cup \sigma H$ (其中 H 为第一类点群, 而 I 型第二类点群由第一类点群与反射群的直积构成, 其不满足表示为第一类点群与 G 群不可约表示的直积。

(2) n 为偶数 $n = 2, 4, 6, \dots$, $I_n = C_n \cup C_n \sigma$ (对于晶体点群, $n = 2, 4, 6$), I_n 表示有垂直于偶次轴的反射面。第一类点群的群元素是第一类点群的 n 倍。

(3) n 为奇数 $n = 3, 5, 7, \dots$, $I_n = C_n \cup C_n \sigma$ (对于晶体点群, $n = 3, 5$), 其中 σ 为 C_n 的 $C_n \sigma = C_n \sigma$, $I_n = C_n \sigma$, 这里 σ 表示群中包含通过主轴(或 n 轴)的平面的反射。这两个点群不包含 n 轴, 称为无轴点群。当 $n = 3$ 时, $I_3 = C_3 \cup C_3 \sigma$, $I_3 = C_3$ 元素比相应第一类点群增加一倍, 记为 I_3 。

(4) 第一类多面体点群, $I_h = I \cup C_2 \cup C_2 \sigma \cup C_2 \sigma^2$ (若不限于晶体群, 还有 $I_h = I \cup C_2 \cup C_2 \sigma \cup C_2 \sigma^2$)。群的对称性可用图 5.16 所示立方体表示, 其中 σ 面平分 4 个 C_2 轴, 3 个等价的 σ 面都通过立方体中心, 且垂直于一个 C_2 轴。有 4 个群元素。群的对称性可用图 5.17 所示立方体表示, 注意其 σ 与 σ^2 不同。此时, 4 个 C_2 轴取代 I 群的 3 个 C_2 轴, I_h 群有 48 个元素。

I_h 称为晶体点群以外的点群, 以与 O_h 相似的方法引入 σ 面, 共有 4 个元素, 且不可约的最高维为五维。

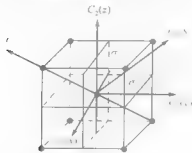


图 5.16 T_d 对称性

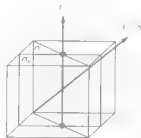


图 5.17 O_h 对称性

(5) 当 $\sigma \notin G$ 时, 相应点群称为 I 型第一类点群。可以证明(无可疑), 其构造方法

是从第一类点群 M 出发, 再取所有阶数为其一半的所有子群 H , 按如下方式构造 $H \cup i(M-H)$, 即可得到 p 型点群:

$$S_{2n} = C_n \cup i(C_{2n} - C_n) = C_n \cup iC_{2n}'C_n, n = \text{偶数},$$

$$C_{2n} = C_n \cup i(C_{2n} - C_n) = C_n \cup iC_{2n}'C_n, n = \text{奇数},$$

$$C_{nv} = D_n \cup i(D_{2n} - D_n) = D_n \cup \sigma_i C_n, n = 2, 3, \dots,$$

$$C_{nh} = D_n \cup i(D_{2n} - D_n) = D_n \cup iC_{2n}'D_n, n = \text{偶数},$$

$$I = I \cup i(I) = I \cup i(I),$$

其中 C 为群, i 为面 σ_i 轴, i 为面 σ_i 轴, $i = \sigma, C^2 \in C$ ($k = 1, \dots, n-1$)。可以证明, $C \cup i(I)$ 同构于 O 群, 从而 I 群的对称性可见一斑。

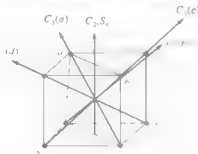


图 5.18 T_d 对称性

其中 I 指的正四面体的角为 a, b, c, d , 每条棱为棱轴或棱轴 C_2 轴, 各面对角线为棱轴 C_3 轴。可以证明, I 群同构于 O 群, 其对称性可见一斑, 而又均已交代清楚。

总之, p 型第一类点群与相应的第二类点群 O 群, 若前者可以构造后者, 后者亦可以构造前者, 即将第一类点群的任一阶数 n 乘以 2 得子群阶数为 $2n$ 子群, 然后将其阶数元素 n 相乘, 即得到 $2n$ 阶有转动, 由此可以得知, 原来 p 型第一类点群同构的第一类点群。

习题 5.4

1. 在直角坐标系中表示出

(1) D_3 群所包含的所有转轴的方向。

(2) D_3 群各转轴的方向, 并指出构成其子群 I 的转动变换。

(3) 证明 I 群的所有元素都可以唯一表示为子群 C_3 和 I 的对应元素之积。

3. 证明: 对开定理, 即 $G = H \cup i(M-H)$ 。

提示: 在 $G = H \cup i(I)$, $H \cap i(I) = \Phi$ 中, 应有 $H \cap i(I) = \Phi$, 否则, $\forall g \in H \cap i(I)$

(2) I_1 体心平移群:

$$T_L = T_1 \{E, \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\},$$

(3) A, B 和 C : 底心平移群:

$$A: T_L = T_1 \{E, \Gamma_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\}, B: T_L = T_1 \{E, \Gamma_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}\}, C: T_L = T_1 \{E, \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}\}.$$

(4) F : 面心平移群:

$$T_L = T_1 \{E, \Gamma, \Gamma, \Gamma, \Gamma, \Gamma\}.$$

图 5.20 展示了这些平移群与晶系结合起来的 14 种晶格类型, 或布拉菲格了。这些平移群与相应的点配合, 形成一种简单晶格, 所谓简单晶格系物, 只是其子群的, 同时, 对于一般晶格, 可以证明, 只有一种, 已描述, 有可能。晶体的对称性根据其性质可见一般晶体物理或晶体结构的书籍。

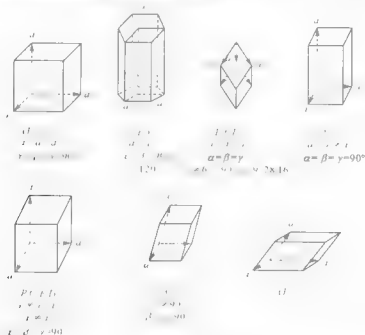


图 5.20 七种晶系结构(14 类结构说明)

表 5.1 列出了 14 种晶格的结构, 图 5.21 列出了 14 种布拉菲格了基矢的配置, 我们可以直观了解其几何结构, 在表 5.2 中列出了 14 种晶格的特征标, 以备查阅。

表 5.4 32 种点群结构

| 点群 | 固有子群 | | 非固有子群 | | | |
|-------|-----------------|-------|-----------|------------|-----------|-----------------|
| | 分解为循环群的乘积 | | 指数为 2 的子群 | | 指数为 4 的子群 | |
| | 群的乘积 | 1 次子群 | 子群 | 指数为 2 的乘积 | 子群 | 循环群的乘积 |
| C_1 | C_1 | | | | C_1 | C_1 |
| C_2 | C_2 | C_1 | C_1 | C_2 | C_{2h} | C_1, C_2 |
| C_3 | C_3 | | | | C_{3h} | C_3 |
| C_4 | C_4 | C_2 | S_4 | S_4 | C_{4h} | C_1, C_4 |
| C_6 | C_6 | C_3 | C_{2h} | C_{2h} | C_{6h} | C_1, C_6 |
| D_2 | C_2, C_2 | C_2 | C_{2v} | C_2, C_2 | D_{2h} | C_1, C_2, C_2 |
| D_3 | C_3, C_2 | C_2 | C_{3v} | C_3, C_2 | D_{3h} | C_1, C_3, C_2 |
| D_4 | C_4, C_2 | C_2 | C_{4v} | C_4, C_2 | D_{2h} | C_1, C_2, C_2 |
| T | C_3, C_2 | | | | | |
| O | C_3, C_2, C_2 | | | | | |
| I | C_4, C_2 | | | | | |
| T_d | C_3, C_2, C_2 | | | | | |
| O_h | C_3, C_2, C_2 | | | | | |

表 5.5 32 种点群特征标

| 点群 | E | C_2 | C_3 | C_4 | C_6 | C_2' |
|--------------------------|-----|------------|------------|-------|------------|------------|
| C_{2v} | E | S_4 | S_6 | S_8 | S_{12} | S_{12} |
| X^1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| X^2 | 1 | ω | ω^2 | 1 | ω | ω^2 |
| X^3 | 1 | ω^2 | ω | 1 | ω^2 | ω |
| X^4 | 1 | ω | ω^2 | 1 | ω | ω^2 |
| X^5 | 1 | ω^2 | ω | 1 | ω^2 | ω |
| X^6 | 1 | ω | ω^2 | 1 | ω | ω^2 |
| X^7 | 1 | ω^2 | ω | 1 | ω^2 | ω |
| $\omega = \exp(i2\pi/3)$ | | | | | | |
| C_{3v} | E | C_3 | C_3^2 | C_2 | C_2' | C_2'' |
| X^1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| X^2 | 1 | ω | ω^2 | 1 | ω | ω^2 |
| X^3 | 1 | ω^2 | ω | 1 | ω^2 | ω |
| X^4 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^5 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^6 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^7 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^8 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^9 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{10} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{11} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{12} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{13} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{14} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{15} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{16} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{17} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{18} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{19} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{20} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{21} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{22} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{23} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{24} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{25} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{26} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{27} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{28} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{29} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{30} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{31} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| X^{32} | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |

| | | | | | |
|----------|-----|---------|----------|------------|------------|
| D_4 | E | C_4^1 | $C_4(2)$ | $C_4^3(2)$ | $C_2^x(2)$ |
| D_{4h} | E | C_4^1 | $C_4(2)$ | $C_4^3(2)$ | $C_2^x(2)$ |
| D_{2d} | E | S_4^1 | $S_4(2)$ | $C_2^x(2)$ | $C_2^y(2)$ |
| χ^1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| χ^2 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| χ^3 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| χ^4 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| χ^5 | 2 | -2 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|----------|-----|---------|------------|----------|------------|------------|
| D_6 | E | C_6^1 | $C_6^2(2)$ | $C_6(2)$ | $C_3^1(3)$ | $C_3^2(3)$ |
| C_{6h} | E | C_6^1 | $C_6^2(2)$ | $C_6(2)$ | $C_3^1(3)$ | $C_3^2(3)$ |
| D_{3h} | E | C_6 | $S_6^1(2)$ | $S_6(2)$ | $C_3^1(3)$ | $C_3^2(3)$ |
| χ^1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| χ^2 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| χ^3 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| χ^4 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| χ^5 | 2 | 2 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| χ^6 | 2 | -2 | -1 | 1 | 0 | 0 |

$$I \quad E \quad C_2(3) \quad C_3(4) \quad C_3^2(4)$$

$$\chi^1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$\chi^2 \quad 1 \quad 1 \quad \varepsilon \quad \varepsilon^2$$

$$\chi^3 \quad 1 \quad 1 \quad \varepsilon^2 \quad \varepsilon$$

$$\chi^4 \quad \varepsilon \quad -1 \quad 0 \quad 0$$

$$\varepsilon = \exp(-i2\pi/3)$$

$$O \quad E \quad C_3(8) \quad C_3^2(3) \quad C_2^x(6) \quad C_4(6)$$

$$T_d \quad E \quad C_3(8) \quad S_4^1(3) \quad C_2^x(6) \quad S_6(6)$$

$$\chi^1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$\chi^2 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1$$

$$\chi^3 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 0$$

$$\chi^4 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad -1$$

$$\chi^5 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad \varepsilon_1$$

晶体结构对称性决定晶体的物理性质, 因此晶体点群、空间群有许多重要应用。

例 5.5.1 证明: 立方晶系的介电常数为标量。

设介电常数张量为 $\epsilon_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, 即 $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{32}, \epsilon_{33}$, 则一般应有

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j$$

不失一般性, 选择坐标, 使 $E = E_j$ (沿 y 轴), 则

$$D_x = \sum_{\alpha, \beta} \epsilon_{\alpha\beta} E \delta_{\beta x} = \epsilon_{x2} E = E_{xy} E (\alpha = x, y, z),$$

以 x 轴为转轴, 作 C_4 操作, $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$, 故 $D' = D_x = D_y = D_z = D_x$ 。

于 C_4 不变性, 应有 $D'_x = D_x, D'_y = D_x$, 由此推知

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{xx} \text{ 和 } \epsilon_{xy} = -\epsilon_{xy} \Rightarrow \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \epsilon_{xx} = 0.$$

再使外场 E 沿 z 轴和 x 轴方向作类似分析, 可见 $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = 0$, 即 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 所有非对角元素为零。

取 E 沿立方体对角线 (C_3 轴), 则给出

$$E_x = E_y = E_z = \frac{1}{\sqrt{3}} E, D_x = \frac{1}{\sqrt{3}} \epsilon_{xx} E, D_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \epsilon_{yy} E, D_z = \frac{1}{\sqrt{3}} \epsilon_{zz} E.$$

作 C_3^1 和 C_3^2 操作, 并计及 C_3 不变性, 即

$$D'_x = D_y, D''_x = D_z, D'_z = D'_y = D''_z \Rightarrow D_x = D_y = D_z,$$

即 $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = E$.

例 5.5.2 求 O 群的特征标.

O 群有 24 个元素, 3 个 2 次轴, 4 个 3 次轴, 6 个 4 次轴. O 群的全类记为 $I, 6C_2, 8C_3, 6C_4, 3C_2'$. 不等价不可约表示的维数由 $\sum_{\alpha=1}^5 \chi_{\alpha}^2(I) = 24$ 得: $I = 1, 1, 2, 2, 3$. 在 χ_{α} 中, $\chi_{\alpha}(C_2) = (-1)^k$ ($k = 1, \dots, 5$), $\chi_{\alpha}(C_3) = 1$ ($\alpha = 1, 2, 3$), $\chi_{\alpha}(C_4) = i$ ($\alpha = 4, 5$), 即特征标表第 1 列已经算出.

注意关系,

$$C_2^2 = E \Rightarrow [\chi_2^{(2)}(C_2)]^2 = \chi_2^{(2)}(E) = 1, \text{ 得 } \chi_2^{(2)}(C_2) = \pm 1,$$

$$C_3^3 = E \Rightarrow [\chi_3^{(3)}(C_3) = 1]^3 = 1 \Rightarrow \chi_3^{(3)} = 1, e^{\pm 2\pi i/3}.$$

$$\begin{aligned} C_4^2 \cdot C_2 &= C_2 \Rightarrow \chi_4^{(2)}(C_4^2) \chi_2^{(2)}(C_2) = \chi_2^{(2)}(C_2) \\ &\Rightarrow \chi_4^{(2)}(C_4^2) = [\chi_4^{(2)}(C_4)]^2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{k=1}^5 \chi_k^{(1)} \chi_k^{(3)} = 0$, 有

$$\chi_3^{(3)}(C_3) = 1, \chi_5^{(3)}(C_2) = -1, \chi_4^{(3)}(C_4^2) = 1.$$

由于 $\sum_k \chi_k^{(1)} \cdot \chi_k^{(3)} = 0$, $\sum_k \chi_k^{(2)} \chi_k^{(3)} = 0$.

将两式相加、相减分别得

$$2 + 8\chi_3^{(3)}(C_3) + 3\chi_5^{(3)}(C_2) = 0, \chi_2^{(3)}(C_2) + \chi_4^{(3)}(C_4^2) = 0,$$

即 $\chi_3^{(3)}(C_3) = -\frac{1}{4} = -\frac{3}{8}\chi_5^{(3)}(C_2), \chi_4^{(3)}(C_4^2) = -\chi_2^{(3)}(C_2).$

代入 $(\chi^{(3)}, \chi^{(2)}) = g = 24$, 经整理有

$$12[\chi_2^{(2)}(C_2)]^2 + \frac{1}{2}[1 + \frac{3}{2}\chi_5^{(3)}(C_2)]^2 + 3[\chi_3^{(3)}(C_3)]^2.$$

但由于 $C_2^2 = I, C_4^2 = I$, 得

$$\chi_2^{(2)}(C_2) = 0, \pm 2, \chi_5^{(3)}(C_2) = 0, \pm 2 \quad (\text{二维表示}).$$

又由前面方程的约束, 给出 $\chi_4^{(2)}(C_4) = i, \chi_5^{(2)}(C_4) = -i$, 由此又定出

$$\chi_3^{(3)}(C_3) = -1, \chi_4^{(3)}(C_4^2) = 0.$$

再计算三维表示, 由

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \chi_k^{(1)} \cdot \chi_k^{(4)} &= 0, \sum_{k=1}^5 \chi_k^{(2)} \cdot \chi_k^{(4)} = 0, \\ \sum_{k=1}^5 \chi_k &= \chi_1 = 1, \sum_{k=1}^5 \chi_k = \chi_2 = 2, \end{aligned}$$

得

$$3 + 8\chi_3^{(4)}(C_3^1) + 3\chi_3^{(4)}(C_3^2) = 0,$$

$$\chi_2^{(4)}(C_2^1) + \chi_2^{(4)}(C_2^2) = 0,$$

$$3 - 4\chi_3^{(4)}(C_3^1) + 3\chi_3^{(4)}(C_3^2) = 0,$$

$$9 + 12[\chi_2^{(4)}(C_2^1)]^2 + 3 = 24,$$

得

$$\begin{cases} \chi_3^{(4)}(C_3^1) = 0, \\ \chi_3^{(4)}(C_3^2) = -1, \\ \chi_2^{(4)}(C_2^1) = -\chi_2^{(4)}(C_2^2). \end{cases}$$

因而, $\chi_2^{(4)}(C_2) = \pm 1$ (正好对应两个二维表示).

O 群特征标表见表 5.6 所示.

表 5.6 O 群特征标表 χ_i^j

| χ_i^j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------|---------|------------|------------|------------|------------|
| χ_i^j | $\{E\}$ | $\{6C_2\}$ | $\{8C_3\}$ | $\{6C_4\}$ | $\{3C_2\}$ |
| χ^1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| χ^2 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| χ^3 | 2 | 0 | -1 | 0 | 2 |
| χ^4 | 3 | -1 | 0 | 1 | -1 |
| χ^5 | 3 | 1 | 0 | -1 | -1 |

问题 5.5

1. 计算群 $O_h = O \otimes C_i$ 的特征标表.

[提示见表 5.7]

2. 求出 O 群的所有不等价不可约表示.

提示: 由于 O 群是单群, 因此 O 群的特征标表, 取 O 的正规子群 $N = \{I, A, A^2\}$, 其商群 O/N 的阶数 $\nu = 1/3$, $O/N = \{N, C, C^2, C^3, C^4, C^5, C^6, C^7, D\} = F, C, C^2, C^3, C^4, C^5, C^6, C^7$, 就是由群 O 到子群 F 的同态映射, $\forall g \in D, \forall x \in O, gN \cdot xN \rightarrow AxN \rightarrow 1$).

我们试由 D 的不可约表示, 通过同态映射, 构造 O 群的不可约表示. O 的生成元可取 C 和 C^2 , 其中 C 轴与 C^2 轴相邻, 由于 $C^3 = C^2 \cdot C = C$, 有 O 群的三维表示

$$\Gamma^{(3)}(C_2) = \Gamma^{(3)}(C_2^2) \Gamma^{(3)}(C_2^3) + \Gamma^{(3)}(C_2^4).$$

表 5.7 O_h 的特征标表

| 类 表 (k) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | E | C_4 | C_2 | C_2 | C_2 | C_2 | C_2 | C_2 | C_2 | C_2 |
| $\chi^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi^{(2)}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| $\chi^{(3)}$ | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| $\chi^{(4)}$ | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| $\chi^{(5)}$ | 2 | 0 | -1 | 0 | 2 | 2 | 0 | -1 | 0 | 2 |
| $\chi^{(6)}$ | 2 | 0 | -1 | 0 | +2 | -2 | 0 | +1 | 0 | -2 |
| $\chi^{(7)}$ | 3 | -1 | 0 | 1 | -1 | 3 | -1 | 0 | 1 | -1 |
| $\chi^{(8)}$ | 3 | -1 | 0 | 1 | -1 | -3 | 1 | 0 | -1 | 1 |
| $\chi^{(9)}$ | 3 | 1 | 0 | -1 | -1 | 3 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| $\chi^{(10)}$ | 3 | 1 | 0 | -1 | -1 | -3 | -1 | 0 | 1 | 1 |

提示: 利用 $\chi^{(k)} = \chi^{(1)} \times \chi^{(k)}$ 及 $\chi^{(k)} = \chi^{(1)} \times \chi^{(k)}$ 有第 5 章 4 节 4.1 节, 可用此法得到。

考虑到同态映射 $\Gamma^{(k)}(C) = \Gamma^{(k)}(E) - \Gamma^{(k)}(C) = \Gamma^{(k)}(I) - \Gamma^{(k)}(C)$, 且 维表示

$$\Gamma^{(3)}(C_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \Gamma^{(3)}(C_2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

O_h 群的 维表示由自然基可得。自然表示是不约的, 取 C_2 轴为角 $\theta = \pi$ 分线, C_2 轴为 $O-x-y$ 的平分线, 易得

$$\Gamma^{(4)}(C_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma^{(4)}(C_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

再另一个 维表示, 由特征标表 $\chi^{(5)} = \chi^{(1)} \times \chi^{(4)}$ 得到 $\Gamma^{(5)} = \chi^{(5)}$ 。

$\Gamma^{(5)}$ 生成元矩阵

$$\Gamma^{(5)}(C_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma^{(5)}(C_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

原则上所有点群的表示均可用此法得到。]

3. 求出 O_h 群的所有不等价不可约表示。

1. 设 $u = L$, \hat{H} 为哈密顿算符中与角度相关部分, 有

$$\hat{H}Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

其中 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 为球谐函数, $l = 0, 1, 2, \dots, m = -l, \dots, -1, \dots, 1, \dots, l$, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 实际上为 $SO(3)$ 群不可约表示 $\Gamma^{(l)}(\chi_l)$ 的 $2l+1$ 个基矢. 基矢请将 $\Gamma^{(l)}(\chi_l)$ 按 D 群约化.

[提示: 在晶体场中, 离子谱项分裂问题, 涉及到此类约化问题.]

$$[\Gamma^{(l)}(g_a)]_{\mu\nu} = e^{i(l+1-\mu)\alpha} \delta_{\mu\nu} (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2l+1),$$

故特征标

$$\begin{aligned} \chi^{(l)}(\chi_l) &= \sum_{\mu=1}^{2l+1} e^{i(l+1-\mu)\alpha} = \sum_{\mu=1}^{2l+1} e^{i(l+1)\alpha} e^{-i\mu\alpha} \\ &= e^{i(l+1)\alpha} \frac{1 - e^{-i(2l+1)\alpha}}{1 - e^{-i\alpha}} = \frac{\sin(l + \frac{1}{2})\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \end{aligned}$$

对于 $D_2, E \Rightarrow \alpha = 2\pi, \chi^{(l)}(2\pi) = 2l+1,$

$$C_2(3) \Rightarrow \alpha = \pi, \chi^{(l)}(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) = \begin{cases} -1 & (l \text{ 为奇数}), \\ +1 & (l \text{ 为偶数}), \end{cases}$$

$$C_2(2) \Rightarrow \alpha = \pm \frac{2}{3}\pi,$$

$$\chi^{(l)}(\chi_l) = \frac{\sin(+\frac{2\pi l}{3} + \frac{\pi}{3})}{\sin(\pm \frac{2}{3}\pi)} = \begin{cases} 1, & l = 3m, \\ -1, & l = 3m-1. \end{cases}$$

总结这些结果, 即得表 5.8 中 $\Gamma = \Gamma^{(l)}$ 与 $\Gamma^{(l)}(\chi_l)$ 的二维表示和三维表示, 而 $\alpha = \alpha^{-1}$, 则为 Γ 的一个二维表示, 一个三维表示. $\Gamma^{(l)}(\chi_l)$ 实际上有无穷多个不可约表示, $SO(3)$ 是连续群.

表 5.8 $SO(3)$ 群表示按 D_2 约化

| 表示 $(\Gamma^{(l)})$ 中与 D 相对 | | | | 从 $\Gamma^{(l)}$ 约化的结果 | |
|-------------------------------|-------|------------|------------|---|------------------------------|
| 类的特征标 $\chi^{(l)}(\chi_l)$ | | | | | |
| l | $ E $ | $ C_2(2) $ | $ C_2(3) $ | $SO(3)$ | D_2 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | Γ_1 | a_1 |
| 1 | 3 | 0 | -1 | $\Gamma_2 \oplus \Gamma_3$ | $a_2 \oplus E$ |
| 2 | 5 | -1 | 1 | $\Gamma_1 \oplus 2\Gamma_3$ | $a_1 \oplus 2e$ |
| 3 | 7 | 1 | -1 | $\Gamma_1 \oplus 2\Gamma_2 \oplus 2\Gamma_3$ | $a_1 \oplus 2a_2 \oplus 2e$ |
| 4 | 9 | 0 | 1 | $2\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus 3\Gamma_3$ | $2a_1 \oplus a_2 \oplus 3e$ |
| 5 | 11 | -1 | -1 | $\Gamma_1 \oplus 2\Gamma_2 \oplus 4\Gamma_3$ | $a_1 \oplus 2a_2 \oplus 4e$ |
| 6 | 13 | 1 | 1 | $3\Gamma_1 \oplus 2\Gamma_2 \oplus 4\Gamma_3$ | $3a_1 \oplus 2a_2 \oplus 4e$ |

注意,其中应用约化公式 $m = \frac{1}{N} \sum_{\mu} \chi_{\mu}(\sigma) \chi_{\mu}(\sigma^{-1})$ 。

b. 设 $H = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r)$, 其中 $V(r)$ 是球面对称势。如果有微扰势 $H' = \epsilon V'$, 其中 V' 具有 D 对称性。求 H' 对 H 的本征态 $\ell = 1, 2$ 的能级简并度的影响。

提示: 利用上题结果, $D = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2\Gamma' + 1\Gamma''$ 。

c. 请将 $S(2, 3)$ 的不可约表示 Γ' 按 O 群和 O_h 群约化。

[提示: 先计算 O, O_h 的特征标。]

第6章 Galois 群及其应用

本章介绍19世纪以来代数学的主要研究内容,即“近世代数”或“抽象代数”的最初思想源泉——Galois理论。它既是19世纪科学界解决重大数学难题的范例,也是代数学发展史上的一个里程碑和转折点。19世纪初,挪威数学家Abel证明了五次以上的方程没有一般求解公式。法国数学家Galois给出了一个给定方程有求解公式的判别准则,提出了“直”及“解群”等新的概念。他把方程有无公式解的问题转化为相应的群是否存在、解群的问题。他解决这一重大数学问题的思想及方法,后人称为Galois理论。德国数学家Dedekind等人系统阐述和整理了Galois的理论,开始注重抽象的代数结构的研究。从此之后,这些研究逐步形成代数几何的土壤。

本章讨论经典的Galois理论,并有时论域扩充到域有限扩张。内容包括Galois理论的基本定理、方程可根式解的判别准则,以及Galois理论的初步应用,旨在使学生欣赏并了解Galois理论的优美数学思想,了解某些世界性的数学难题是如何利用Galois理论得到解决的,并且也对有限群论和域论这两个代数分支的联系有进一步的认识。

§ 6.1 代数方程解法概述

1. 关于什么是代数学的历史观点

关于什么是代数学以及代数学的基本问题,这是两个问题的观念,在代数学的发展史,有两次改变。一次是在19世纪中期,另一次则发生在20世纪初,从而把代数学的发展史相应地分为三个时期。代数学的历史不可不解析几何、数学分析的历史,后者由它们的创始人——笛卡儿、牛顿、莱布尼兹等奠基,虽然有进一步的发展,甚至用大量的新内容来补充它们,但是它们的本来面貌在原则上却没有大的改变。而代数学在其发展的一个历史时期内,人们曾把一个很不相同的东西理解为代数学。

法国数学家韦达与笛卡儿引进了字母表示法,从这个时候开始,人们把代数看或是关于字母计算、关于代数式的变换,以及代数方程等的科学。在那里,整个数学,无论是几何学还是数学分析都被叫做代数学,这就是关于什么是代数学的第一个观点。欧拉的著

作《代数学引论》特别明显地体现了这一点。

在 15 世纪及 16 世纪初,代数方程的解法问题被认为是代数学的中心问题。16 世纪意大利数学家卡瓦列里、达芬奇以及韦达方程的一般形式,但在长达一百年的岁月里人们没能找到代数方程的解法。在这段日子里,围绕着这个问题数学家们进行了艰苦的努力,建立了“大代数的发展理论”。17 世纪中期人们把代数学看成是解代数方程的理论,这就是关于什么是代数学的第二个观点。

17 世纪后期,由代数方程第一理论时产生的理论迅速发展起来,由于物理学等学科及数学本身的需要,越来越多的数学家开始研究一些元素。这些元素已不是单纯的数,随之很自然地来研究这些元素的一群,且这些群具有不同于普通数的运算规律。例如,向量、面积、质量、质量、动量等,这些量都是可以用数表示的,不同形式的量的运算规律也不同。这些量的某个集合对于给定的运算以及这些运算满足某些规律,组成了某一个代数系统。

代数学的中心问题就是研究各种代数系统,如群、环、域、代数、格等。这就是什么时代数学的第一观点。研究各种代数系统的数学分支,即公理化的或抽象的代数学。

2. 代数方程解法的历史概述

如上所述,代数方程的解法曾在 15 世纪末及 16 世纪初,被认为是代数学的中心问题,而在这之前,是古希腊人、巴比伦人。

我们知道,古代,埃及,巴比伦,希腊,印度,阿拉伯,波斯,中国,阿拉伯人方程叫做一元二次方程。当最高次项系数不等于 1 时,用适当的方程两边同除以化成这种形式,其中 x, a_2, \dots, a_n 是某数域上给定的数,叫做方程的系数。

对于一元二次及三次方程,在阿里·花刺子模的著作中已记有一般解法,其解法公式相当简单,初中代数教材中都有。关于一元二次方程,在 12 世纪,阿拉伯数学家塔里塔利业得到了一次方程的一般解法。一元三次方程的解法如下:

设一元三次方程 $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ 。

令 $y = x - \frac{a}{3}$, 得 $x^3 + px + q = 0$, 这样,任一元三次方程都可以化成不含平方项的

三次方程 $x^3 + px + q = 0$, 设 $u^3 + v^3 + p = 0$, $u^3 + v^3 + p = 0$, $u^3 + v^3 + p = 0$, 比较系数得 $u^3 + v^3 = -p$, $u^3 + v^3 = -p$, 即 $u^3 + v^3 = -p$, $u^3 + v^3 = -p$, 由此可知,三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的根,所以

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

每一方程有一个不同的值,即可得出九种可能,但由 $u^3 + v^3 = -p$ 所,只仅有下面

种可能

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q}{4} + \frac{p}{27}} + \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{4} + \frac{p}{27}}} \\ x &= \sqrt{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q}{4} + \frac{p}{27}} + \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{4} + \frac{p}{27}}} + a, \\ x &= \sqrt{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q}{4} + \frac{p}{27}} + \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{4} + \frac{p}{27}}} + a, \end{aligned}$$

其中 $a = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{3} + i\sqrt{3}}$ 或 $a = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{3} - i\sqrt{3}}$ 或 $a = 1$ 或 $a = -1$ 。

当解为实数时,可以分下面四种情况来讨论:

- ① $q^2/4 + p^3/27 < 0$ 且 $p < 0$; ② $q^2/4 + p^3/27 < 0$ 且 $p > 0$;
③ $q^2/4 + p^3/27 > 0$ 且 $p > 0$; ④ $q^2/4 + p^3/27 = 0$, 以下从略。

由于当时还没有虚数的概念,所以塔里塔利多的公式只限于

$$x = \sqrt{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q}{4} + \frac{p}{27}} + \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{4} + \frac{p}{27}}}$$

次方程解决之后,自然又提出了四次方程解法的问题,下面我们介绍四次方程的解法。

设四次方程

$$y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4 = 0.$$

令 $y = x - a_1/4$, 得 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$,

其中 $p = \frac{3}{8}a_1^2 - a_2$, $q = \frac{a_1}{2}(a_2 - \frac{3}{4}a_1^2) + a_3$, $r = \frac{1}{64}a_1^4 - \frac{1}{4}a_1a_2 + \frac{1}{4}a_3a_1 - a_4$ 。

因为 $x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + p/2 + a)^2 + qx + r - p^2/4 - a^2 - 2ax^2 - pa$,
所以方程可化成

$$(x^2 + p/2 + a)^2 - [2ax^2 - qx + (a^2 + pa - r + p^2/4)] = 0 \quad (*)$$

方程 $2ax^2 - qx + (a^2 + pa - r + p^2/4) = 0$ 的判别式为:

$$\Delta = q^2 - 4 \times 2a(a^2 + pa - r + p^2/4),$$

令 $\Delta = 0$, 即 $q^2 - 4 \times 2a(a^2 + pa - r + p^2/4) = 0$,

此为关于 a 的二次方程, 设 a 为它的一个根, 则 (*) 方程可化为两个平方形式, 即

$$2ax^2 - qx + (a^2 + pa - r + p^2/4) = 2a_0(x - q/4a_0)^2,$$

于是上面方程可以化成 $(x - p/2 - a - 2a_0)(x - q/4a_0) = 0$,

此方程可分解成两个二次方程:

$$x^2 + \sqrt{2a_0} + \left[\frac{p}{2} + a_0 - \frac{q}{\sqrt{2a_0}} \right] = 0, x^2 - \sqrt{2a_0} + \left[\frac{p}{2} + a_0 + \frac{q}{\sqrt{2a_0}} \right] = 0,$$

解这两个方程,便可求出方程的解,从而得到四次方程的解.

上面的解法是由意大利数学家费拉里首先发现的,故称之为“费拉里解法”.

法国数学家拉格朗日在 1770 年发表的定义关于代数方程解法的思想中,论述了一次、二次及四次方程的解法.拉格朗日的想法与先前的意大利学者不同,前者对每种情况都针对其方程的特点有自我完善.这些想法使得拉格朗日得到解四次方程,是富有创意的但看起来又好像是千篇偶然的.而拉格朗日则是从一个统一的思想上出发借助对称多项式的理论及置换的理论得到了统一的一次、二次、四次方程的解法.下面以四次方程的解法为例加以说明.

在拉格朗日的解法中,他引进了式子

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \cdots + \omega^{n-1} x_n$$

其中 $\omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ 是 n 次方程 $x^n - 1 = 0$ 的 $n-1$ 个根, ω 是 1 的任一次根.我们称上面的式子称为拉格朗日预解式.四次方程 $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ 的拉格朗日预解式为 $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \omega^3 x_4$.

显然 ω 是 1 的 4 次方程根,取 $\omega = i$, 则此预解式变为 $x_1 + ix_2 - x_3 + ix_4$.

作出 $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ 的 16 组复数,共 16 种,得到 16 个拉格朗日预解式

$$\begin{aligned} & x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 - x_3 + x_4, \\ & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, -x_1 - x_2 + x_3 + x_4, -x_1 + x_2 + x_3 - x_4, \end{aligned}$$

以上述八个式子为根的六次方程的系数是恒为 x_1, x_2, x_3, x_4 的互不相同的,不变的,因为这八个排列中的任何一个只能把 x_1, x_2, x_3, x_4 中一个排列一下,而 x_1, x_2, x_3, x_4 的系数.它的根的顺序无关,正是这些系数 a_0, a_1, a_2, a_3 或以下来.此外,由于这八个式子成对具有相反的符号,所以这八个方程只有偶次项,直接计算可知这个六次方程是:

$$\begin{aligned} y^6 & - (3a_1^2 - 8a_2)y^4 + 3(a_1^3 - 16a_1^2a_2 - 16a_1a_3 + 64a_0)y^2 \\ & - (a_1^4 - 4a_1 + 18a_3)^2 = 0, \end{aligned}$$

令 $y^2 = x$, 则得到 x 的三次方程.设它的根是 α, β, γ , 则

$$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0,$$

从而有 x_1, x_2, x_3, x_4 的方程组或原方程组.

解这四个关于 x_1, x_2, x_3, x_4 的方程组或原方程组,即可求出原方程的四个根.

从上面的过程可以看出,解四次方程归结为解三次方程.类似地可讨论三次,

次方程的解法. 从某种意义上讲, 16 世纪西方方程的解法有一个共同的特点, 即把这类方程通过合适的变换(如四次方程解法上的塔朗日换解式)化为低次数较简单的方程来解.

拉格朗日正确地认识到根的置换理论是解代数方程的关键.

18 世纪, 挪威数学家阿贝尔, 研究了这样一类问题: 如果方程的次数不小于 5, 那么任何由方程系数组成的根式都不可能表示方程的根. 这就是说在五次及五次以上方程的根号解法是不存在的.

阿贝尔虽然证明了一般性: 五次及五次以上方程不能用根号解出, 但并不是说所有五次及五次以上的方程都不能用根号解. 例如一元五次方程 $x^5 - 1 = 0$ 就永远能用根号解, 因此, 阿贝尔的证明并不是问题的全部. 代数方程理论的最美妙之处仍然留在那里, 即具有什么条件的特殊五次及五次以上的方程可以, 且能用解出呢? 所以, 在阿贝尔的工作之后, 人们用根号解代数方程的问题, 还留待形式提了出来. 寻求代数方程能用根号解的充分必要条件. 这个问题后来为数学家们(如华里士)所大, 他引入了置换群的概念, 从而赋予了代数方程用根号解的条件问题, 从而开辟了代数方程的一个新的领域——群论.

围绕着手用根号解代数方程的问题, 人类经过了一个多世纪之久的艰苦劳动, 最终由 19 世纪中叶的数学家给予了彻底回答. 阿贝尔在他 18 世纪 50 年代末, 不仅提出了本身的解法, 而且, 由于代数学发展史, 而促进了代数, 关于抽象群的理论也迅速发展起来. 有代数学家被公认为是代数系统(代数)之父, 以就是什么是代数学的第一人.

而数学界指出, 代数学家拉格朗日在 1771—1773 年所发表的定义关于代数方程解法的问题, 一直, 直到根的置换, 而正确地认识到根的排列理论是整个问题的关键. 18 世纪末, 数学家和西方系统地研究置换群理论. 更一般地说, 概念是伽罗华在 19 世纪 30 年代直到 1830 年, 为代数学家, 建立了关于一般抽象群的定义, 他不仅彻底解决了用根号解代数方程的问题, 而且开创了代数学发展的新时期——近代数论时期.

§ 6.2 Galois 基本定理

设 F 是域 E 的子域, 令 $\text{Aut}(F)$ 是 E 中所有自同构组成的集, 则 $\text{Aut}(E)$ 关于映射的合成是群. 令

$$G(E/F) = \{\sigma \in \text{Aut}(E), \sigma(a) = a, \forall a \in F\},$$

则可验证 $G(E/F)$ 是 $\text{Aut}(E)$ 的子群. 设 $G \leq G(E/F)$, 令

$$E^G = \{a \in E \mid \sigma(a) = a, \forall \sigma \in G\},$$

则 F 是域 E 称为群 G 的固定域. 若 $F = K = F$ 且是域, 则称 K 是中间域, 若把 E 看

作 f 的向量, 则 f 在 L 上的重数称为 f 在 L 上的次数, 记为 $\deg f: L$.

例 1. 设 F 是有理数域, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 则 $\deg f: L = 1, \forall f \in F[x]$.

其中 $f: a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}, a, b \in F$, 从而 $E^{G(L/F)} = F$.

下面的命题揭示了多项式的根与系数之间的关系, 是韦达定理的推广.

命题 6.2.1 设 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in F[x]$ 是域 F 上的首项多项式, L 是 F 的分裂域, 且 $f(x) = (x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$, 其中 $z_i \in L$, 有下列结果:

$$a_{n-1} = -\sum z_i, a_{n-2} = \sum z_i z_j, a_{n-3} = -\sum z_i z_j z_k \cdots a_0 = (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n,$$

称为关于 z_1, z_2, \cdots, z_n 的初等多项式.

命题 6.2.2 设 $f(x)$ 是域 L 上的首项多项式, L 是 F 在 L 的分裂域, $\alpha \in F$, z_1, z_2, \cdots, z_n 是 $f(x)$ 的根, 则对于 $\forall \sigma \in G(L/F)$, $\sigma(\alpha)$ 是 $f(\sigma(x))$ 的根, 且 $\sigma \in G(L/F)$ 的所有根的集合上的一个置换.

证明 设 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in F[x]$

则 $f(\sigma) = \sigma^n + a_{n-1}\sigma^{n-1} + \cdots + a_1\sigma + a_0 = 0$

对 σ 对 L 上的一切根进行变换, 由 $\sigma \in G(L/F)$ 中, 可知, 我们有

$$\begin{aligned} f(\sigma(\alpha)) &= \sigma(\alpha)^n + a_{n-1}\sigma(\alpha)^{n-1} + \cdots + a_1\sigma(\alpha) + a_0 \\ &= \sigma(\alpha)^n + \sigma(a_{n-1})\sigma(\alpha)^{n-1} + \cdots + \sigma(a_1)\sigma(\alpha) + \sigma(a_0) = 0. \end{aligned}$$

故 $\sigma(\alpha)$ 是 $f(x)$ 的根, 故 S 是 L 的根组成的集合, 因 σ 是单射, 故 σ 在 S 上的限制 $\sigma|_S: S \rightarrow S$ 是单射, 即 $\sigma|_S: S \rightarrow S$ 是 S 到 S 的置换, 这样 σ 是 S 的一个置换.

由命题 6.2.1, 我们可断言 σ 置换 $f(x)$ 的根, 也说 $(\sigma, f(x))$ 置换 $f(x)$ 的根. 由于 $f(x)$ 的系数都是 F 上 $f(x)$ 的根的所有初等多项式, 故对于 $f(x) \in F[x]$ 置换 $f(x)$ 的根等价于 $f(x) \in F[x]$ 中任意多项式 $f(x)$ 的系数 a_i 置换 $\sigma(a_i)$. 由 Galois 理论中可证明, 判定 $f(x)$ 的多项式根的集合上置换作成群的集合称为未讨论多项式方程在 F 上解是 Galois 理论的思想源泉之一.

命题 6.2.3 设 $S = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\} \subset L$ 是 n 元子集, F 是 S 的闭包域, 则 $[F: E^S] \geq n$.

证明 设 $E = F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是 F 在 F 上的 n 基, 考虑齐次线性方程组

$$\begin{aligned} x_1 g_1(a_1) + \cdots + x_n g_n(a_1) &= 0, \\ x_1 g_1(a_2) + \cdots + x_n g_n(a_2) &= 0, \\ &\vdots \\ x_1 g_1(a_m) + \cdots + x_n g_n(a_m) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

中方程的个数, 与未知数个数, 故 (2.9) 在 F 中有非零解, 因为 a, a, \dots, a 线性无关, 所以这些解不全在 I 中, 再设 a_1, \dots, a_r 是所有解中包含零最多的一个, 不妨设 $a_i \neq 0 (i \leq r), a_r = 1, a_j = 0 (j > r)$, 则我们有

$$\begin{aligned} a_1\phi_1(a_1) + \dots + \phi_1(a_r) &= 0, \\ a_1\phi_2(a_1) + \dots + \phi_2(a_r) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ a_1\phi_s(a_1) + \dots + \phi_s(a_r) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

又 a, a, \dots, a 不全在 I 中, 且至少存在一个 $i (i \leq r-1)$ 和一个 $j (j \leq r)$ 使得 $a_i \neq a_j$. 不妨设 $a_i \in F$ 且 $a_j \notin F$, 用 φ_j 作用 (2.9) 式的两边, 有

$$\begin{aligned} \varphi_j(a_1)\varphi_j\phi_1(a_1) + \dots + \varphi_j(a_r)\varphi_j\phi_1(a_r) &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ \varphi_j(a_1)\varphi_j\phi_2(a_1) + \dots + \varphi_j(a_r)\varphi_j\phi_2(a_r) &= 0, \\ \text{即 } \begin{cases} \varphi_j(a_1)\varphi_j\phi_2(a_1) + \dots + \varphi_j(a_r)\varphi_j\phi_2(a_r) &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\varphi_j(a_1)\varphi_j\phi_s(a_1) + \dots + \varphi_j(a_r)\varphi_j\phi_s(a_r) = 0.$$

式 (2.9) 与式 (2.10) 对应方程相减得

$$(a_1 - \varphi_j(a_1))\varphi_j\phi_1(a_1) + \dots + (a_{r-1} - \varphi_j(a_{r-1}))\varphi_j\phi_s(a_{r-1}) = 0 (i=1, 2, \dots, n)$$

这里 $a_1, \dots, a_{r-1} \in F$, 我们知 $a_r = 1$, 这就有方程组 (2.11), 从而方程组 (2.11) 有非零解 $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in F$, 满足 $\varphi_1 a_1 + \dots + \varphi_s a_r = 0$, 这与假设矛盾于是我们有 $[E:F] = |E^{G(E,F)}|$,

反之由定义 $[E:F] = |E:E^{G(E,F)}|$, 于是 $E:E^{G(E,F)} = F:E^{G(E,F)} = E^{G(E,F)}$, 由此得 $[E^{G(E,F)}:F] = 1$, 也即 $E^{G(E,F)} = F$.

1. 设 $f(x) \in F[x]$ 是不可约多项式, $\alpha \in E$ 是 $f(x)$ 的一个根, 设 a, a, \dots 是在 (E, F) 作用下 E 上互不相同的根, 不妨设 $a = a_1$, 而 $f(x)$ 在 $E[x]$ 中能分解成一次因式之积, 从而 F 是 F 的正规域

因为 $f(x) \in F[x]$, 故在 $E[x]$ 中, $f(x) = (x - a_1)\dots(x - a_n)$, 设 $\sigma \in G(E, F)$, 则 σ 以和明显的方法可扩展为 $E \rightarrow E$ 的一个自同构, 且对某个整数 i , 我们有

$$p(x) = \sigma(p(x)) = (x - \sigma(a_1))\sigma(q(x)) = (x - a_1)\sigma(q(x)).$$

这就说明, 每个 $(x - a_i)$ 是 $p(x)$ 在 $E[x]$ 中的一个因子, 于是我们有

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)h(x).$$

设 $s(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$,

则 $s(x)$ 的系数是 a, a, \dots, a 的初等对称多项式, 故它在 $\sigma \in G(E, F)$ 作用下保持不变, 故 $\sigma(s(x)) = s(x)$.

又由假设 $F = E^{G(E,F)}$ 知 $s(x) \in F[x]$.

推论 6.2.5 设 F 是域 E 的扩张, $G = \text{Aut}(E)$ 是 F 伽罗瓦群, 则

1) 若 $\varphi \in \text{Aut}(E)$ 固定 E^G , 则 $\varphi \in G$;

2) 若 G_1 和 G_2 是 $\text{Aut}(E)$ 的两个不同的有限子群, 则 $E^{G_1} \neq E^{G_2}$.

证明 1) 若 $\varphi \in G_1$, 则 E^{G_1} 在 φ 作用下保持不动, 于是 $E^{G_1} \subseteq E^{G_2}$. 另一方面, $[E: E^{G_2}] = n$ 矛盾.

2) 若 $E^{G_1} = E^{G_2} = F$, 则 F 也被 G_2 固定, 且 $1 \neq 0$, 知 $G_2 \subseteq G_1$. 类似地也有 $G_1 \subseteq G_2$, 从而 $G_1 = G_2$ 矛盾.

设 E 是域 F 的扩张, E 称为 F 的 **Galois 扩张** (或 **Galois 扩张**), 若 F 满足定理 6.2.1 的 1), 2), 3) 及 4) 中的任意一条, 记与 E/F 或 $F \subseteq E$ 相应地, $G(E/F)$ 称为 **Galois 扩张 E/F 的 Galois 群**. 若 $F[x] \supseteq F[y]$, E 是 $F[y]$ 在 F 上的分裂域, 则 $G(E/F)$ 也称为 $F[y]$ 在 F 上的 Galois 群, 或方程 $f(y) = 0$ 在 F 上的 Galois 群. 不失一般性, 一个扩张的 Galois 群与一个多项式的 Galois 群有实质性的区别. 另外, 若 E/F 是 Galois 扩张, K 是 F 的中间域, 则 E/K 也是 Galois 扩张, 这一简单事实我们以后要用到.

例 6.2.1 设 $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 计算 $G(E/\mathbb{Q})$.

解 E 是 $F = \mathbb{Q}$ 的 Galois 扩张. E 在 \mathbb{Q} 上的分裂域且 E/\mathbb{Q} 是 4 次, 且有 E/\mathbb{Q} 是 Galois 扩张. E 的每个元可唯一表示为 $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{2}\sqrt{3}$, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. 因为 $G(E/\mathbb{Q})$ 的每个元置换 E 的根, 于是 E 的每个自同构 σ 完全由它在 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 上的作用确定, 因而仅有的可能性是

$$\sigma_1: \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}, \sqrt{3} \mapsto \sqrt{3}; \sigma_2: \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}, \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3};$$

通过计算易得, $\sigma_1^2 = 1$, 因为 $G(E/\mathbb{Q})$ 是 4 阶, 故 $G(E/\mathbb{Q}) = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\}$. 由此可见 $G(E/\mathbb{Q})$ 是 Klein 四元群.

例 6.2.2 设 $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, 计算 $G(E/\mathbb{Q})$.

解 φ 在 \mathbb{Q} 上的不可约多项式为 $x^3 - 2$. 它的两个根分别为 $\sqrt[3]{2}, \omega\sqrt[3]{2}$, 其中 ω 为三次原单位根. 于是 $G(E/\mathbb{Q})$ 中元 σ 置换 $\sqrt[3]{2}, \omega\sqrt[3]{2}$ 的根, 且有 $\omega \notin E$, 故 $\sigma(\sqrt[3]{2}) = \omega\sqrt[3]{2}$, 从而 $\sigma \neq 1$, 即 $G(E/\mathbb{Q}) = 1$. 但 E/\mathbb{Q} 不是 Galois 扩张.

定义 6.2.1 设 E 是 F 的有限扩张, K, A 是中间域, 域 K 称为与 A 共轭, 若存在 $\sigma \in \text{Aut}(E)$, 使得 σ 在 F 上是恒等映射且 $\sigma(A) = K$. 这样的 σ 称为 F 自同构. 若对 $\forall \sigma \in G(E/F)$ 都有 $\sigma(K) = K$, 则 K 称为 F 的正规扩张. 对于 $\alpha, \alpha' \in E$, 称 σ 为 α 共轭, 若存在 $\sigma \in \text{Aut}(E)$ 使得 σ 在 F 上是恒等映射且 $\sigma(\alpha) = \alpha'$.

定理 6.2.6 设 E 是 F 的 Galois 扩张, $F \subseteq K \subseteq E$, 则 K 与 K' 共轭, $G(E/K)$ 与 $G(E/K')$ 是 $G(E/F)$ 的共轭子群.

域.

定理 6.2.9 (Galois 基本定理) 设 E/F 是有限 Galois 扩张, 又 E 分别是 K, K 的 Galois 扩张, 由定理 6.2.8, 得 $E/F \cong K/F \cong K/K$, 所以 σ 是单射. 其对应的 Galois 群为 $G = G(E/F), K/K, K$ 是 F 上 E 的中间域, II, H, H 是 G 的子群, 则:

1) 在 E 的子域 K 与 G 的子群 H 之间有一个一一对应: $\sigma \mapsto G(E/K)$ 使得 $K \mapsto H \Leftrightarrow K = E$. 在 G 的子群 H 与 E 的子域 K 之间也有一个一一对应 $\varphi: H \mapsto E$ 使得 $H \mapsto K \Leftrightarrow H = G(E/K)$.

进一步地, $II = H \cap F = F$, 此时 σ, φ 称为互逆对应:

$$2) [E:K] = |G(E/K)|, [K:F] = [G(E/F):G(E/K)];$$

$$3) K = K \cap G(E/F) = G(E/F) \cap K, K \cap K = G(E/F) \cap G(E/K),$$

$$4) K \text{ 和 } K \text{ 是其极子域 } G(E/K) \text{ 和 } G(E/F) \text{ 是其极子群,}$$

$$5) E^{(H_1 \cap H_2)} = E^{H_1} \cap E^{H_2}, E^{H_1 \cap H_2} = (E^{H_1}, E^{H_2}),$$

$$G(E/(K_1, K_2)) = G(E/K_1) \cap G(E/K_2),$$

$$G(E/(K_1 \cap K_2)) = G(E/K_1), G(E/K_2).$$

证明 1) 设 $M = K \cap K$ 是 F 的包含 F 的子域, $\lambda = H \cap H$ 是 G 的子群, 令 $\sigma: M \rightarrow \lambda$, 其中 $\sigma(K) = G(E/K)$, 任意 $K, K \in M$, 若 $K = K$, 由定义即得 $G(E/K) = G(E/K)$. 故 σ 是 M 到 λ 的一个映射. 又若 $K \subset K = G(E/K)$, 则 $G(E/K) \subset G(E/K)$, 则 $E^{G(E/K)} \subset E^{G(E/K)}$. 设 $H \in \lambda$, 令 $K = F$, 则 $K \in M, \sigma(K) = G(E/K) = G(E/E^H)$.

又 E 是 F 的 Galois 扩张, 故 $E = K = F^{G(E/K)}$, 又 $H = G(E/E^H)$, 故 σ 是满射, 从而 σ 是 M 到 λ 的一一对应. 若 $\sigma(K) = H$, 则 $G(E/K) = H$, 从而 $E^{G(E/K)} = E^H$. 又 E 是 K 的 Galois 扩张, 从而 $K = E^{G(E/K)} = E^H = F$, 综合上述满射的证明, 我们有 $\sigma(K) = H \Leftrightarrow K = E^H$.

2) 因为 $E/F, E/K$ 是 Galois 扩张, 由定理 6.2.4 知,

$$[E:F] = |G(E/F)|, [E:K] = |G(E/K)|;$$

$$\text{又 } [E:K] = [E:F][K:F],$$

$$\text{从而 } [K:F] = |G(E/F)/G(E/K)|;$$

$$\text{又 } G(E/K) \leq G(E/F), \text{ 故 } [K:F] = [G(E/F):G(E/K)];$$

3) 只需证 $G(E/F) \cong G(E/F)/G(E/K)$.

因为 K 是 F 的 Galois 扩张, 是对 $\forall \tau \in G(E/F), \tau$ 限制在 K 上诱导出 K 的一个自同构, 记为 τ_K . 现在我们定义 $\varphi: G(E/F) \rightarrow G(E/F)$, 其中 $\varphi(\tau) = \tau_K$.

下证 φ 是同态满射, 且 $\ker \varphi = G(E/K)$, 从而结论得证.

首先, 直接验证可知 φ 是群同态. 又 $\tau \in \ker \varphi \Leftrightarrow \tau_K$ 是 K 的恒等自同构 $\Leftrightarrow \tau \in$

$G(E/K)$ (即 $\text{Ker} \varphi = (E/K)$), 于是由群的同态基本定理得 $G(F/F) = (E/K) = \text{Im} \varphi$. 因为 K 是 F 的 Galois 扩张, 得 $K = F = (K/F)$, 于是由 (2) 即得 $\text{Im} \varphi = (K/F)$.

(4) 由定理 6.2.6 即得:

(i) 设 $1 = H = H = G$, 则由 (1) 又得 $H/H = (H/H)$, 因为 τ 是反序对换, 故 $\tau(H/H) = \tau(H/H) = H/H$, 由此得 $\tau(H/H) = H/H$, 从而 $\tau(H/H) = H/H$. 又 τ 是满射, 存在 H/H 使 $\tau(H/H) = \tau(H/H) = H/H$, 从而 $\tau(H/H) = H/H$. 因为 τ 也是反序对换, 用 τ 作用于两边得 $H/H = H/H$, 从而 $H/H = H/H$. 另一方面, $\tau(H/H) = \tau(H/H) = H/H$, 用 τ 作用两边又得 $(H/H) = H/H$, 于是在 $H/H = H/H$, 从而 $H/H = H/H = \tau(H/H) = H/H$ (1) $\tau(H/H)$, 这说与 $H/H = E^{H_1} \cap E^{H_2}$ 类似地可证其他等式.

例 6.2.3 设 $Q = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 确定域扩张 E/Q 的所有子域与它的 Galois 群 $G = G(E/Q)$ 的所有子群之间的关系.

已知 $G = \{1, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$ 有一个子群 $1 = \{1, \tau, 1, \sigma, 1, \sigma\tau\}$ 和 G . 再由例 6.2.2 可知, 1 的固定域为 E , $1, \tau$ 的固定域为 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $1, \sigma$ 的固定域为 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $1, \sigma\tau$ 的固定域为 $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$. 以及 G 的固定域为 \mathbb{Q} . 容易验证 G 满足 Galois 理论的基本定理的 (1) 成立.

例如 G 的一个子群是 G 的主子群, 它对应的固定域也都是 \mathbb{Q} 的 Galois 扩张. 用图 6.1 直观地解释 Galois 群 G 的子群与其对应的固定域之间的关系.

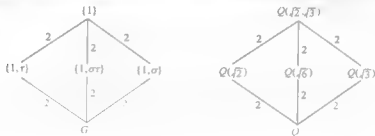


图 6.1

图 6.1 中的例子“较充分地”解释了 Galois 理论的基本定理.

例 6.2.4 设 $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$, 其中 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, 确定域扩张 E/Q 的所有子域与它的 Galois 群 $G = G(E/Q)$ 的所有子群之间的关系.

第一, 首先考察 E 是 \mathbb{Q} 的有限可分正规扩张. 令 $f(x) = x^3 - 2$, $f(x)$ 在 \mathbb{Q} 上不可约, 它在 \mathbb{C} 上可分解为

$$f(x) = (x - \omega)(x + \omega)(x - \omega i)(x + \omega i), (\text{其中 } \omega = \sqrt[4]{2}).$$

于是 E 是 $f(x)$ 在 \mathbb{Q} 上的分裂域, f 是 \mathbb{Q} 的有限正规扩张域. 因 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\omega)$, f 是

$$[E:\mathbb{Q}] = [E:\mathbb{Q}(\omega)][\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}] = 2 \times 4 = 8.$$

第五步, 确定 G 的元素. 分别记 σ, τ 为 $\mathbb{Q}(\omega)$ 的 \mathbb{Q} -自同构, σ, τ 为 f 的根为

$$\sigma(\omega) = \omega^3, \tau(\omega) = \omega^2, \sigma^2(\omega) = \omega, \tau^2(\omega) = \omega.$$

直接验证或应用定理 6.5.6 我们可知

$$\sigma(1) = 1, \sigma(\omega) = \omega^3, \tau(1) = -i, \tau(\omega) = \omega$$

是 E 的两个 \mathbb{Q} -自同构, 它们的乘积得到 f 的 \mathbb{Q} -自同构, 这 8 个自同构是

$$I = (1), \sigma = (1234), \tau = (24), \sigma^2 = (13)(24), \sigma^3 = (1432);$$

$$\sigma\tau = (12)(34), \sigma^2\tau = (13)(24), \sigma^3\tau = (14)(23).$$

G 是 S_4 的 Sylow 2 子群.

第六步, 考察 G 的结构和几何解释. 如图 6.1 所示, 设 $G = \langle \sigma, \tau \rangle$, 其中 σ 为 $\tau = I, \sigma\tau = \sigma$ 在正四面体群 D , 因 $\tau = (24)$, 对 4 个根来说是正方形的四个顶点的对称恰为一个根的置换, 即为 G 中群 D 的元素. 由 G 中群 D , 可看作是正方形的对称群.

第四步, 确定 $G(E/\mathbb{Q})$ 的所有子群.

直接验证可知: 阶为 8 的子群 $G \cong D_4$;

阶为 4 的子群

$$G_1 = \langle I, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^3\tau \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2;$$

阶为 2 的子群

$$H_1 = \langle I, \sigma^2\tau \rangle \cong \mathbb{Z}_2, H_2 = \langle I, \tau \rangle \cong$$

$$\mathbb{Z}_2, H_3 = \langle I, \sigma^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2, H_4 = \langle I, \sigma\tau \rangle \cong \mathbb{Z}_2, H_5 =$$

$$\langle I, \sigma^3\tau \rangle \cong \mathbb{Z}_2;$$

阶为 1 的子群 $\{I\}$.

第七步, 确定 $G(E/\mathbb{Q})$ 的所有子群之间的关系.

如图 6.1 所示, 其中用 1 斜线连接 X 和 Y , 表示 $X \leq Y$.

第八步, 确定 $G(E/\mathbb{Q})$ 的子群对应的 E 的子域之间的关系. 由 Galois 理论的基本定理, $G(E/\mathbb{Q})$ 的子群对应的 E 的子域如图 6.1 所示, 其中用 1 斜线连接 X 和 Y , 表示 $X \leq Y$.

第七步, 确定 E 与 \mathbb{Q} 的中间域:

容易验证 \mathbb{Q} 有一个二次扩张 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(i)$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$, 它们分别是三个四阶子群的固定域, 即 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = E^{G_1}, \mathbb{Q}(i) = E^{G_2}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}i) = E^{G_3}$.

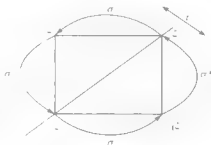


图 6.1

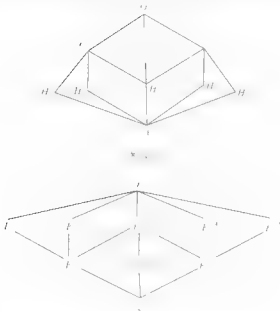


图 6.4

下面我们以后以 E^{H_1} 为例来描述其他的中间域

E 的每个元可表为 $a = x + y\omega + z\omega^2 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + a_4\omega^4 + a_5\omega^5 + a_6\omega^6 + a_7\omega^7$ 的形式, 其中 $a_0, \dots, a_7 \in \mathbb{Q}$. 于是

$$\begin{aligned}\sigma\tau(a) &= a_0 + a_1\omega i - a_2\omega^2 - a_3\omega^3 i - a_4 i + a_5\omega(-i) + a_6(\omega i)^2 i - a_7(\omega i)^3 \\ &= a_0 + a_5\omega - a_2\omega^2 - a_7\omega^3 - a_4 i + a_1\omega i + a_6\omega^2 i - a_3\omega^3 i.\end{aligned}$$

因而 a 被 $\sigma\tau$ 固定当且仅当 $a = a_0 + a_5\omega - a_2\omega^2 - a_7\omega^3 + a_1\omega i + a_6\omega^2 i - a_3\omega^3 i$.
 a_6 , 由此知

$$a = a_0 + a_1(1+i) + a_5/2((1+i)\omega)^2 - a_3/2((1+i)\omega)^2,$$

这意味着 $E^{H_1} = \mathbb{Q}(\omega(1+i))$. 类似地我们有

$$E^{H_2} = \mathbb{Q}(\omega i), E^{H_3} = \mathbb{Q}(\omega), E^{H_4} = \mathbb{Q}(\omega^2, i), E^{H_5} = \mathbb{Q}(\omega(1-i)).$$

可以验证以上这些域就是所有的中间域, 而且这些中间域之间的包含关系以及 Galois 理论的基本定理中的 5) 均成立.

第八步, 确定 G 的正规子群与 \mathbb{Q} 的 Galois 扩张.

验证可知 G 的全部正规子群为 $G, G, \langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle$ 和单位元群 $\{1\}$. 由 Galois 理论的基本定理可知,

$Q \subset F, Q \subset Q' \subset F, Q(\omega) \subset F, Q(\omega) \subset E, Q(\sqrt{-2}) \subset E, E'$ 是 Q 的含在 E 中的所有可能的 Galois 扩张.

事实上, Q 的这些扩张分别是多项式 $x^3 - 1, x^2 - 1, x^2 + 2, x^2 - x - 2$ 以及 $x^2 - 2$ 在 Q 上的分裂域, 因而都是 Q 的 Galois 扩张.

另一方面, $F = Q(\omega)$ 不是 Q 的 Galois 扩张, 因为不可约多项式 $x^3 - 2$ 有一个根在 $Q(\omega)$ 中, 但它不是 $x^3 - 2$ 的分裂域. 类似地,

$$E^{H_1} = Q(\omega i), E^{H_2} = Q(\omega(1+i)), E^{H_3} = Q(\omega(1-i))$$

均不是 Q 的 Galois 扩张.

第九步, 确定含在 E 中的 Q 的 Galois 扩张的 Galois 群:

由上步结论知, 含在 F 中的 Q 的 Galois 扩张共有 5 个, 其中 $G(F/Q) = G, G(F/E) = 1$, 其他 3 个 Galois 扩张的 Galois 群也可由 Galois 基本定理得到, 例如 $G(E/F) = G/H_3 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

下面我们直接计算 $G(F/F') \cong \Gamma_{F'}$, 说明它恰好是 $F' = E$.

因为 $F = Q(\omega)$, 所以, 它的 Q 自同构完全由它在 ω 和 ω^2 上的作用确定. 易验: 它恰有四个 Q 自同构, 如下所示:

$$f: \omega \mapsto \omega, \omega^2 \mapsto \omega^2, f: \omega \mapsto \omega, \omega^2 \mapsto \omega^2,$$

$$g: \omega \mapsto -i, \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}, fg: \omega \mapsto -i, \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}.$$

因为 $f = \text{id}_F, f \neq g$, 故有 $G(F/F') = E = E$, 这恰是我们所希望的, 直接计算其他几个子域来验证 Galois 理论的基本定理的.

第十步, 确定 G 的共轭子群与 E 的共轭子域.

由于 $\sigma, Q(\omega) = Q(\omega)$, 故 $\sigma(Q(\omega)) = Q(\omega)$ 是其域的, 按照 Galois 理论的基本定理, 其对应的 Galois 群 H 与 H 是共轭的, 事实上, 我们有 $H = H$. 类似地, $Q(\omega(1+i)\omega)$ 与 $Q((1-i)\omega)$ 是共轭的, 群 $H_1 = H_3$.

问题 6.2

1. 设 $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$, 计算 $f(x)$ 的 Galois 群.

2. 求证 $Q(\sqrt{-2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ 是 Q 的 Galois 扩张, 并求其 Galois 群.

3. 利用上题求

(1) $\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}$ 在 Q 上的极小多项式;

(2) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 在 $Q(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15})$ 上的极小多项式.

4. 计算 $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 在 Q 上的 Galois 群 G , 找出 G 的全部子群及其对应的固定

域,找出 E 的全部正规子群及其对应的 $\text{Gal}(E/F)$ 扩张

例 6.3.2 E/F 是有限 Galois 扩张, $F \subset K \subset E$, K 为中间域,若所有的中间域 K 对 F 均有相同的次数, $[K:F]$, 则 K/F 均为 Galois 扩张.

例 6.3.3 设 F 是域, $f(x) = x^n - 1$ 有一个根 $\alpha \in F$, 求证: $f(x)$ 的 Galois 群与 $f(x)/(x - \alpha)$ 的 Galois 群是相同的.

§ 6.3 自同构群

经过 Galois 的研究,搞清楚了 F 与 $F[x_1, \dots, x_n, \dots, x_k]$ 的关系,其关键在于使 F 保持不变的 F 上的自同构群的结构.这是 Galois 理论的核心内容.

前面已经给出了同构与自同构的概念,把它们应用到群、域上便可以得到群、域的同构与自同构:

定义 6.3.1 (1) 如果群 G_1 与 G_2 间存在同构映射,则称群 G_1 与 G_2 同构.群 G_1 到它自身的同构映射称为自同构.

(2) 设 F 与 F' 是两个域, F 与 F' 的代数运算分别记作 $+$, \cdot 与 $+$, \cdot , 如果对于 $\forall a, b \in F$, 总有 $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$, 则称 F 到 F' 的一个双射 $f: F \rightarrow F'$ 为域 F 与 F' 间的同构映射.此时称 F 与 F' 同构.如果 f 是域 F 到它自身的同构映射,则称 f 是域 F 的自同构变换,简称自同构.

例 6.3.1 设 $F(\sqrt{2})/F$ 是由数域 F 添 $\sqrt{2}$ 而生成的扩张,其中 $\sqrt{2}$ 是方程 $x^2 - 2 = 0$ 的一个正根,则对于 $\forall a + b\sqrt{2} \in F(\sqrt{2})$, 必存在 $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2} \in F(\sqrt{2})$. 求证: 对于映射 f , 使 $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, 那么 f 是 $F(\sqrt{2})/F$ 的自同构.

证明 因为 $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, 显然是满射,也是单射,因此是双射.对于 $\forall a, b \in F$, 令 $u = a + b\sqrt{2}$, $v = a - b\sqrt{2}$, 其中 $a, b, c, d \in F$, 则 $u + v = a + b\sqrt{2} + a - b\sqrt{2} = 2a$, 所以 $f(u + v) = a = (u + v)/2 = (f(u) + f(v))/2$. 又因为 $f(u) = a - b\sqrt{2}$, $f(v) = a + b\sqrt{2}$, 所以 $f(u) + f(v) = (a - b\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) = 2a$. 因此 $f(u + v) = (f(u) + f(v))/2$. 同理可证 $f(uv) = f(u)f(v)$, 所以 f 是 $F(\sqrt{2})/F$ 的自同构.

与置换的乘积相类似,也可以定义两个域 F 上两个自同构变换 I 与 T 的乘积 $I \circ T$ 为先作变换 T , 再接着作变换 I . 下面证明 $I \circ T$ 是数域 F 上的自同构变换.

显然, $T_1 \circ T_2$ 是双射,并且对于 $\forall a, b \in F$, 有

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1(a+b) &= T_2(T_1(a+b)) = T_2(T_1(a) + T_1(b)) \\ &= T_2 \circ T_1(a) + T_2 \circ T_1(b). \end{aligned}$$

同理可证 $T_2 \circ T_1(ab) = (T_2 \circ T_1(a)) \circ (T_2 \circ T_1(b))$.

所以 $I \circ T$ 是数域 F 上的自同构变换. F 上的恒等变换 I 显然是 F 的自同构变换.

下面证明数域 F 上的自同构变换构成的集合 G 关于上面定义的乘法运算作成个群.

首先, 两个自同构变换的乘积仍是数域 F 上的自同构变换, 因此对所定义的乘法运算是封闭的. 第二个单位元是 I , 又数域 F 上的恒等变换是自同构变换, 不难验证它是 G 的单位元. 对于任意两个自同构变换 T, T' , 由于 I 是双射, 所以 T^{-1} 显然存在, 下面证明 T^{-1} 也是自同构变换. 为此, 对于数域 F 中任意元素 a, b , 设 $T(a) = a', T(b) = b'$, 则 $T(a') = a, T(b') = b$. 于是

$$\begin{aligned} T^{-1}(a+b) &= T^{-1}(T(a') + T(b')) = T^{-1}(T(a' + b')) \\ &= T^{-1}T(a' + b') = a' + b' = T^{-1}(a) + T^{-1}(b); \\ T^{-1}(ab) &= T^{-1}(T(a')T(b')) = T^{-1}(T(a'b')) \\ &= T^{-1}T(a'b') = a'b' = T^{-1}(a)T^{-1}(b). \end{aligned}$$

所以 T^{-1} 也是自同构变换, 故 $I^{-1} = I$. 因此 G 对于上面定义的乘法作成群.

我们称数域 F 上的全体自同构变换的集合 G 按上面定义的乘法运算作成的群为数域 F 的自同构变换群, 简称自同构群.

在上一节中 $F(\sqrt{x})$ 是由数域 F 添加 \sqrt{x} 而生成的扩域, 已证明了 I 是 $F(\sqrt{x})$ 上的自同构变换. 此外, 把 I 再对换 \sqrt{x} 多次, 其结果不变, 故 $I, I \circ I, I \circ I \circ I, \dots$ 构成 $F(\sqrt{x})$ 上的自同构变换群. 它是同构为循环群 C_2 的. 对于 $\forall \alpha \in F$, 有 $I(\alpha) = \alpha$, 所以在 I 的作用下 F 中属于 F 的那些数域均不变, 称这个群 $G = \{I, I \circ I\}$ 为数域 $F(\sqrt{x})$ 的保持 F 不变的自同构变换群.

对于任何数域 F 包含有理数域 \mathbb{Q} , 设 I 是数域 F 的一个自同构变换, 在 I 的作用下, 任何有理数不变.

首先证明 $I(0) = 0$, 与此取数 $a \in F$, 因为 $I(a) = I(a+0) = I(a)$, 又由 $a \neq -a$ 得 $T(a+0) = T(a)$, 所以 $T(0) = 0$.

其次证明 $I(1) = 1$, 取数 $b \in F, b \neq 0$. 因为 $T(b) = I(b \cdot 1) = T(b) \circ T(1)$, 由 $b \neq 0$ 且 $T(0) = 0$, 知 $T(b) \neq 0$, 所以 $T(1) = 1$.

再次证明对于任意自然数 n 有

$$T(n) = n \text{ 及 } T(-n) = -n.$$

$$T(n) = T(1 + 1 + \cdots + 1) = T(1) + T(1) + \cdots + T(1)$$

$$= 1 + 1 + \cdots + 1 = n,$$

又 $n + (-n) = 0$, 所以 $T(n + (-n)) = T(0) = 0$, 但 $T(n + (-n)) = T(n) + T(-n) = n + T(-n)$, 所以 $T(-n) = -n$. 至此, 已证明了在 T 的作用下任何整数保持不变.

最后证明在 T 的作用下, 任意 $p = pf, q$ 为任意整数, $q \neq 0$ 保持不变, 即 $T(p/q) = p/q$. 因为 $p = q(p/q), T(p) = p, T(q) = q$, 故有 $p = T(p) = T(q \cdot (p/q)) = q \cdot T(p/q) = qT(p/q)$. 由此得 $T(p/q) = p/q$. 因此在自同构变换 T 作用下有理数不变.

般地, 如果 K 是 F 的扩域, 让 K 的自同构变换群 G 中使 F 上的元素不变的那些自同构变换的全体构成的集合为 H , 容易证明 H 是 G 的子群, 称 H 为数域 K 在其子域 F 上的自同构群.

群 H 使 F 的数不变, 那么使域 K 的数如何变化? 下面就回答这个问题.

定理 6.3.1 设数域 K 在其子域 F 上的自同构群 H , 那么对于 $\forall f \in H, u \in K$, $T(u)$ 必是 u 在 F 上的某一个共轭元素.

证明 只需证明 u 与 $T(u)$ 满足 F 上的同一个不可约方程.

设 u 满足 $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0 = 0$, 其中 $b_0, \cdots, b_{n-1} \in F$. 因为 $f \in H$, 所以

$$\begin{aligned} 0 &= T(0) = T(u^n + b_{n-1}u^{n-1} + \cdots + b_1u + b_0) \\ &= T(u^n) + T(b_{n-1}u^{n-1}) + \cdots + T(b_1u) + T(b_0) \\ &= (T(u))^n + b_{n-1}T(u)^{n-1} + \cdots + b_1T(u) + b_0, \end{aligned}$$

所以 $T(u)$ 也满足 u 所满足的数域 F 上的不可约方程, 故 $T(u)$ 是 u 在数域 F 上的某个共轭元素.

例 6.3.2 $Q(\sqrt{2})$ 是 Q 添加 $\sqrt{2}$ 生成的扩域, 作 $Q(\sqrt{2})$ 上的映射 $f, Q(\sqrt{2}) \rightarrow Q(\sqrt{2})$, 使 $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, 其中 $a, b \in Q$. 知 f 是自同构, 且是保持 Q 中元素不变的自同构.

$f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ 是 $\sqrt{2}$ 的共轭元素, 因为它们同时满足 Q 上的不可约方程 $x^2 - 2 = 0$. 因为 $f^2 = I$, 所以 $Q(\sqrt{2})$ 在 Q 上的自同构群 $H = \{I, f\}$ 它是一个周期为 2 的循环群.

另一方面, 设 F 和 K 是两个数域, K 是 F 的扩域, $F \subset K$, K 在 F 上的自同构群 $H = \{S, I\}$ 满足 $S^2 = I$. 今证明 K 是 F 的二次扩域. 对于 $\forall \alpha \in K$, 有 $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \alpha^2$, 能不同, 但 $\alpha + \alpha^2$ 和 $\alpha\alpha^2$ 在自同构 S 的作用下一定不变.

$$S(a + a') = S(a) + S(a') = a' + a = a + a'; S(aa') = S(a)S(a') = aa'.$$

由于 S 是 K 在 F 上的自同构群 H 的元素, 所以, $a \in F, aa \in F$, 设 $a + a' = m, aa' = h$, 则有 $m, h \in F$, 所以

$$aa'' = \sqrt{h^2 - 4m},$$

$$\text{于是 } a = 1/2h + \sqrt{h^2 - 4m}, a' = 1/2h - \sqrt{h^2 - 4m}.$$

这就是说, a 必可表示为 $a = b + j$ 的形式, 其中 $m, h \in F$, 从而 a 都是 F 中的数, 这就说明数域 K 是由数域 F 添加由 F 上的数所确定的数 j 的平方根 $-q$ 生成的, 由此可见 K 是 F 的二次扩域.

综上所述, F 上添加一次根式生成的正规扩域与保持 F 中数不变的 K 的自同构变换群有密切的联系.

例 6.3.3 \mathbb{Q} 上不可约方程 $x^4 - 2 = 0$ 的根域 $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$, 显然有

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \text{ 和 } \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i),$$

于是 \mathbb{Q} 上不可约方程 $x^4 - 1 = 0$ 的根, $i, -i$ 是 \mathbb{Q} 上不可约方程 $x^2 + 1 = 0$ 的根, $\mathbb{Q}(i)$ 上的任何元素都可以表示为 $a + bi$, $a, b \in \mathbb{Q}$, 其中 $i, b, a, d \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ 上的一个自同构变换,

$$S: S(a + bi) = a - bi, \quad S(a + di) = a + di, \quad S(c + di) = c - di,$$

显然 S 保持 $\mathbb{Q}(i)$ 上的数不变, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ 上的另一个自同构变换,

$$T: T(a + bi) = a + bi, \quad T(c + di) = c + di, \quad T(e + fi) = e - fi,$$

显然 T 保持 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ 中的数不变, 而 TS 也是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ 上的一个自同构变换.

因此 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ 在 \mathbb{Q} 上的自同构群 $H = \{I, S, T, TS\}$, 不难看出 $I = S^{-1} = T^{-1}$, $TS = ST, (ST)^2 = SI = I$, 并且 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ 在 \mathbb{Q} 上的自同构群是 $\{I, T\}$, 在 $\mathbb{Q}(i)$ 上的自同构群是 $\{I, S\}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ 是 \mathbb{Q} 与 $\mathbb{Q}(i)$ 的正规扩域. 这个例子说明, 不同的中间扩域相应于不同的自同构群.

§ 6.4 方程有根式解的判别方法

方程论中一个经典的问题是: 给了一个数域 F 上的 n 次方程 $f(x)$, 是否存在一个由 $f(x)$ 的系数的有限次加、减、乘、除及开方运算组成的公式, 使得这个方程的每个根都可由这个公式表达出来?

对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, 我们有解的公式:

$$x^n = \frac{b}{a} = \frac{b}{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

类似地, 对于一元二次、四次方程, 我们也有相应的解的公式. Gauss 理论就是研究五次及五次以上的一元方程是否有类似的公式解.

对于 $f(x) \in F[x]$, 首先假设有这样的公式存在. 由于加、减、乘、除运算可在 F 中进行, 从而一个数域 E 中文字相等于 F 中数, 使得 $f(x) \in F[x]$. 由此存在一个子域链 $F \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k = F$, 其中 $F_i = F_{i-1}(\alpha_i)$, $\alpha_i \in F_{i-1}(\alpha_i + 1 \leq i \leq k)$, 使得 $f(x)$ 的每个根都在 E 内.

反之, 如果有 $f(x)$ 的根域链, 使得 $f(x)$ 的每个根都落在 F 内, 则对方 $f(x) \in F[x]$ 的每个根, 总存在在 E 的一个表示式. 这个表示式是由 $f(x) \in F[x]$ 的系数经有限次加、减、乘、除及开 n 次根式求得, 此时我们说 $f(x)$ 中有根式表示.

定义 6.4.1 域的扩张 E/F 称为根式扩张, 若存在自然数 $n, n \geq 1$, 使得 $\alpha \in F_1 = F(\alpha^n)$, $F \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k = E$, 使得每个 E_{i+1}/E_i 是纯根式扩张.

设 f 是 F 上多项式 $f(x)$ 的分裂域, F 称为根式可解 (或有根式解), 若存在一个根式扩张链 $F \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k$ 使得 $F_k = F$.

引理 6.4.1 设 F 是域, $F = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 是 F 的扩张, 若 $\sigma \in G(F/F)$, 且对所有的 i 都有 $\sigma(\alpha_i) = \alpha_i$, 则 $\sigma = 1_E$.

证明 对 n 用归纳法. 若 $n = 1$, 则对每个 $\alpha \in F$, $\sigma(\alpha) = F(\alpha) = F$, 其中 $F = F(\alpha)$, $\alpha \in F$ 且 $\alpha^n \in F$, 因为 σ 固定 α , 且 $\alpha^n \in F$ 和 $\alpha^n \in F$ 的系数, 故 σ 固定 F 有 $\sigma = 1_E$. 对于 $n \geq 2$, 用归纳假设, σ 固定 $F = F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ 中每个 α_i . 令 $\alpha_n = \alpha$, 由于 σ 固定 α , 以及 α^n , 重复上述作法, 得出 σ 固定所有的 $\alpha \in F$. 结论得证.

引理 6.4.2 设 n 是正整数, F 是域, $b \in F$ 且 $b \in F$ 不整除 n , E 是 F 上多项式 $x^n - b$ 的分裂域, 则 E/F 是 E 的循环群, 其中 $E = F(\alpha)$.

证明 设 $\text{char } F$ 不整除 n , 则 $m = n - 1$, 且 $\alpha^m \in F$, $\alpha \in F$, 从而 $f(x)$ 无重根. 因 F 含有 m 个不同的 n 次单位根, 知 E/F 是 n 次单根扩张. 故 E/F 的伽罗瓦群 $G(E/F)$ 是 n 阶的循环群, 且由 α 的一个 n 次本原单位根 α 生成. 设 σ 是 $G(E/F)$ 的一个本原单位根 α , 于是 $E = F(\alpha)$. 设 $\sigma \in G(E/F)$, 则对某个 i , $1 \leq i \leq m$, $\sigma(\alpha) = \alpha^i$. 考虑 $G(E/F)$ 到 W_n 的映射

$$\varphi: \sigma \mapsto \alpha^i,$$

若 $\sigma(\omega) = \omega^i$,

则 φ 是群的单同态, 故 $G(E/F)$ 是 d 阶循环群, 其中 $d \mid m$.

推论 6.4.3 设 m 是正整数, F 是域, $\text{char } F$ 不整除 m , 若 F 是 F 上多

$\Phi \in (\alpha, E/F)$. 现在由 $\Phi(\alpha) = \varphi(\alpha)$, 故 (F/F) 传递地作用在 $\rho(F)$ 的根集 (零点组成的集合) 上.

反之, 设 $(\alpha, E/F)$ 传递地作用在 $\rho(F)$ 的根集上, 若 $\rho(F)$ 可约, 设 $\rho(F) = \rho_1(x)\rho_2(x)\cdots\rho_k(x)$, 其中 $\rho_1(x) = f(x)$ 是不可约的, 在 E 中选择 $\rho_1(x)$ 的一个根 α , 选择 $\rho_2(x)$ 的一个根 β , 假设有 $\sigma \in (F/F)$ 使得 $\sigma(\alpha) = \beta$, 由命题 6.2 知, σ 置换 $\rho_1(x)$ 的根, 又因为 $\rho_1(x)$ 无重根, 故 β 不可能是 $\rho_1(x)$ 的根, 矛盾. 故 $\rho(F)$ 不可约.

定理 6.4.8 设 K 是 F 的有限可分扩张, 则存在 K 的扩张 E 使得 E 是 F 上单多项式 $f(x)$ 的分裂域. 若 K/F 是根式扩张, 则 F/F 也是根式扩张.

证明 设 $K = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 是对称的, 存在 F 上非零多项式 $f(x)$ 使得 $\rho_1(\alpha) = f(x)$ 是 $f(x) = f_1(x) \cdots f_k(x)$ 在 F 上的分裂域, 则 $K = F$.

另一方面, 若 α, α' 是 $f(x)$ 的两个根, 存在 F 上到 F 的同构映射 σ 使得 $\sigma(\alpha) = \alpha'$, 这样的 σ 把扩张 F 的自同构 $\tau \mapsto \tau|_F$ 映到 (F/F) 使得 $\sigma(\alpha) = \varphi(\alpha) = \alpha$.

又知若 τ 是 (F/F) 的根, 则对任意 $\beta \in \rho_1(\alpha, \sigma(\alpha))$, $\sigma(\beta)$ 也是 $f(x)$ 的根, 从而 β 由 $\sigma(\beta)$, $\sigma \in (F/F)$ 生成, 其中 $\sigma(\beta) = f(\sigma(\alpha), \dots, \sigma(\alpha))$, 设 K/F 是根式扩张, 不妨设

$$F \subseteq F(\gamma_1) \subseteq F(\gamma_1, \gamma_2) \subseteq \cdots \subseteq F(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r) = K$$

其中每个 $F(\gamma_i)/F \subseteq \cdots \subseteq F(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1})$ 是纯根式扩张, 于是对于每个 $\sigma \in (F/F)$, $F(\sigma(\gamma_1), \dots, \sigma(\gamma_r))$ 是 F 的根式扩张. 由 F/F 是根式扩张, $M = \sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2), \dots$, 把 M 中的元素加到 F 中, 得到 F 的一个扩张 K_1 , 使得 $F \subseteq K_1 \subseteq K$, 则我们有下列纯根式扩张链

$$F \subseteq F(\gamma_1) \subseteq F(\gamma_1, \gamma_2) \subseteq \cdots \subseteq F(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r) = K$$

例如, 若 $\gamma_1 = f(x)$, 则 $\sigma(\gamma_1) = \varphi(\gamma_1) = \gamma_1 \in F$, 因而 $\sigma(\gamma_1) = \gamma_1 \in F$, $\sigma(\gamma_2) \in F(\sigma(\gamma_1))$. 假设对所有 $\gamma_i \in M$, 包含 $M = \sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2), \dots$ 上所有元素的根式扩张 F 已构造出来, 令 $M = \sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2), \dots$, 类似于一述作法, 把 M 中的元素加到 K_1 中, 得到 K 的一个扩张 K_{i+1} , 显而易见 K_{i+1}/K_1 是根式扩张.

例如, 若 $\gamma_1 = f(x)$, $\gamma_2 = \dots$, 则 $\sigma(\gamma_1) = \gamma_1 \in F$, $\sigma(\gamma_2) \in F(\sigma(\gamma_1)) = K_1$, 因此 K_1/K 是 F 的根式扩张. 由归纳原理知, 因为 $E = K$, 故 F 是 F 的根式扩张.

定理 6.4.9 设 F 是特征为零的域, 则 F 上多项式有根式解当且仅当 F 上多项式的 Galois 群是可解群.

证明 \Rightarrow 设 F 上多项式 $f(x)$ 有根式解, 则存在一个纯根式扩张链

$$F \subseteq E_1 \subseteq F \subseteq \cdots \subseteq E_r = K$$

使得 $F = K$, 其中 F 是 $f(x)$ 在 F 上的分裂域, 设 $E_i = F(\alpha_i), \alpha_i \in F$, 由定理

6.1.8 可设 K 是 F 的 Galois 扩张, 设 $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Gal}(K/F)$ 是 $f(x)$ 在 F 上的 Galois 群, 由 Galois 基本定理, $\text{Gal}(K/F) \cong G(K/F) \cong G(K/E)$, 只需证 $G(K/F)$ 可解即可.

令 $n = n_1 n_2 \cdots n_r$, 令 M 是 x^{n-1} 在 K 上的分裂域, 且 M 有一个 n 次本原单位根 ζ , 可以看出, 所有的 n_1, n_2, \dots, n_r 次单位根均在 $F(\zeta)$ 中, 因为 K 是 F 的 Galois 扩张, 故它是 F 上某个多项式 $g(x)$ 的分裂域. 设 M 是多项式 x^{n-1} 在 F 上的分裂域, 故 M 也是 F 上的 Galois 扩张, 因为 $F \subset K \subset M$, 再由 Galois 基本定理,

$$G(K/F) \cong G(M/F)/G(M/K),$$

因而只需证 $G(M/F)$ 可解即可.

$$\text{令 } M_0 = F, M_1 = F(\zeta), M_2 = M_1(\omega_1), \dots, M_{i+1} = M_i(\omega_i) = M,$$

因为所有的 n 次本原单位根均在 $M = F(\zeta)$ 中, 从而都在 M_i 中, 故在 x^{n-1} 之后 M 是 M_i 的分裂域, 且有 M_i 是 M 的 Galois 扩张. 令 $H_i = G(M/M_i)$, 则 $H_i = G(M/F)$, $H_{i+1} = 1$.

于是我们得到 $G(M/F)$ 的子群列

$$H = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_r = 1$$

因为 M 是 M_i 上的 Galois 扩张, M_i 是 M_{i+1} 上的 Galois 扩张, 由 Galois 理论的基本定理知

$$G(M/M_{i+1}) = H_{i+1} \leq G(M/M_i) = H_i, \text{ 且 } H_i/H_{i+1} \cong G(M_{i+1}/M_i),$$

则对 $\forall i$, H_i/H_{i+1} 是循环群, 知 $G(M/F)$ 是可解群.

6.1.9 设 F 是 F_0 在 F_0 上的分裂域, F_0 的 Galois 群 $G = G(F_0/F)$ 是可解群, 则 G 有一个指数为素数 p 的子群 H , 设 ζ 是 x^{p-1} 次本原单位根, 因为 F 的特征为零, 故 ζ 含在 F_0 的某个子域 E 中, 我们对 $F \subset E \subset F_0$ 用归纳法.

若 $F = F_0$, 结论显然成立, 此时 F 是它自身的根式扩张域. 考虑中间域 $F \subset E \subset F_0$, 因为 $F \subset E$ 是 Galois 扩张, 故 $E \subset F_0$ 也是 Galois 扩张. 由 Galois 理论的基本定理知 $\text{Gal}(E/E)$ 也是可解群. 因为 $F \subset E \subset F_0 = F_0$, 由归纳假设, 存在一个纯根式扩张链

$$E'' \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_r,$$

其中 $F \subset E$, 因为 $H \subset G$, 又由 Galois 理论的基本定理知, $E' \subset F$ 是 Galois 扩张, 且

$$[G:H] = p = [E:E''].$$

我们分两种情况讨论.

1) $\alpha \in F$ 在这种情况下, $E = F(\alpha)$, 其中 $\alpha \in F$, 因而上述纯根式扩张链 E 以通过添加 $F \subset E''$ 加长而得到 E_1/F 是一个根式扩张.

2) $\alpha \in F$ 令 $F = F(\alpha)$, 设 $E = F(\alpha)$, 因为 E 是 $F(\alpha)$ 在 F 上的分裂域, 故 E 是 $f(x, \alpha) = 1$ 在 F 上的分裂域. 由于 $\alpha \in F$, 故 $f(x, \alpha) = 1$ 是可分多项式, 由定理 6.1.4 知 $E = F$ 是 Galois 扩张, 从而 $E' \subset F$ 也是 Galois 扩张. 设 $G' = G(E' \subset F)$, 则有

的,目前Galois理论领域研究内容之一就是计算有理数域 \mathbf{Q} 上小次数的多项式的Galois群.

Galois理论中一个有趣的称为逆Galois问题是:对每一个有限群 G ,是否存在 \mathbf{Q} 上的Galois扩张 L ,使得 $G(L/\mathbf{Q}) \cong G$.从目前结果来看,我们对这个问题的回答都是肯定的.已经知道下列群是 \mathbf{Q} 上的Galois扩张 L 的Galois群:1) S_n , 2) A_n , 3) p -群, 4) p 为素数,可解群.有限单群分类完成之后,已知大多数单群都是Galois群.

问题 6.4

1. 确定下列多项式的Galois群.

$$1) f_1(x) = x^3 - x^2 - 4;$$

$$2) f_2(x) = x^3 - 2x^2 + 4;$$

$$3) f_3(x) = x^3 - x + 1;$$

$$4) f_4(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1;$$

$$5) f_5(x) = x^3 - 10x^2 + 1.$$

以 $f(x)$ 是 \mathbf{Q} 上的 p 次不可约多项式, p 为素数,若 $f(x)$ 恰有两个复根,则 $f(x)$ 在 \mathbf{Q} 上的Galois群是 S_p .举例说明,如果 p 不是素数,结论不一定成立.

3. 利用上题证明 $x^5 - 2x^3 - 8x + 2$, $x^5 - 4x + 2$ 没有根式解.

1. 设 F 是特征为零的域, $f(x) = f_0x^n + \cdots + f_n$ 是 n 次多项式,其分裂域为 E , $K = \mathbf{Q}[x]$, E 有根式解当且仅当 $[E:F] \leq 60$.

证明:对有限群 G ,存在Galois扩张 L 使得 $G(L/F) \cong G$.

6. 设 $f(x)$ 是域 F 上的不可约多项式,若它有一个根可用根式表示,则它所有根并都可用根式表示.

§ 6.5 Galois 群与用根号解代数方程

定义 6.5.1 设 $f(x) = 0$ 是数域 F 上的方程,数域 N 是 $f(x) = 0$ 的根域,则称 N 在 F 上的自同构群为方程 $f(x) = 0$ 的Galois群.

已知 \mathbf{Q} 上的方程 $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ 的根域 $N = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, i)$,由 $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbf{Q}(\sqrt{2})(i)$ 在 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 上的自同构群是 $\{I, S\}$, I/S , I/S , 因此, \mathbf{Q} 上的方程 $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ 的Galois群是 $\{I, S, T, TS\}$,其中 $T^2 = S^2 = I, TS = ST, ST \circ ST = SSTT = I$.

定理 6.5.1 设 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in F[x]$ 是数域 F 上的不可约多项式,在根域 N 内有 n 个不同的根,则 $f(x) = 0$ 的Galois群是 $n!$ 个置换构成的对称群 S_n .

数)「 $K, K_1, \dots, K_r, \dots, K_n$ 」由上列扩张序列 \dots 得出 G_n 群的不变子群序列

$$G_n \supset G_{n-1} \supset G_{n-2} \supset \dots \supset G_1 \supset I.$$

并且由于 r, \dots, n 都是素数,所以 G_i 都是 G_{i-1} 的极大不变子群.所以 $\{G_i\}$ 是合成群列, r, \dots, n 是组合因数.因此,当 \dots 方程可用代数方法求解时,它的Galois群的组合因数都是素数,即它的Galois群是可解群.

反之,如果一个方程在其系数域中的 r, \dots, n 群是可解群,则此方程必可用代数方法求解.

下面对此 \dots 进行简单的说明.先看一种特殊情况,即数域 F 上的方程 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ 的次数 n 是素数.于是 \dots 它的Galois群 G 是 n 阶的,如 a_1, \dots, a_n 的置换所构成的循环群 $G = \{I, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}\}$,这个群是可解群,它的合成群列是 $G \supset I = \{1\}$.

设方程的根为 x_1, \dots, x_n ,这 n 个根可用下面的方法求得.

设 ω 是1的 n 次原根,考虑方程组

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = r_0 = -a_1$$

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \dots + \omega^{n-1} x_n = r_1$$

$$x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^4 x_3 + \dots + \omega^{2n} x_n = r_2$$

$$\dots\dots$$

$$x_1 + \omega^{n-1} x_2 + \omega^{2n-2} x_3 + \dots + \omega^{(n-1)^2} x_n = r_{n-1}$$

任取上述方程组中的一个方程

$$x_1 + \omega^k x_2 + \omega^{2k} x_3 + \dots + \omega^{(n-1)k} x_n = r_k,$$

把置换 $\alpha = (1\ 2\ 3\ \dots\ n)$ 作用于此方程的左边,得

$$x_2 + \omega^k x_3 + \omega^{2k} x_4 + \dots + \omega^{(n-2)k} x_n + \omega^{(n-1)k} x_1,$$

这与用 ω^k 乘方程的左边所得结果相同,这是因为 $\omega^n = 1$,故

$$\omega^{nk} = \omega^{n^2} = \omega^{nk} = \omega^{(n-1)k},$$

所以

$$x_2 + \omega^k x_3 + \omega^{2k} x_4 + \dots + \omega^{(n-2)k} x_n + \omega^{(n-1)k} x_1 = r_k \omega^k,$$

因此置换 $\alpha = (1\ 2\ 3\ \dots\ n)$ 把 r_k 变为 $r_k \omega^k$.(在 α 作用下 ω 不变),所以置换 α 不改变 r_k 的值.由于群 G 中的置换都是 α 的幂,所以 G 中的任一置换都不改变 r_k 的值.由此 (r_k) 必为 Γ 中的元素,可令 $r_k = a_k$,则 $a_k \in F$,亦即 $r_k \in F$.因此上面方程组可写成

4. 令 $\alpha = a + bi$ 在特征不为 p 的域 F 上不可约, 它是它的 Galois 群, 即叫:

(1) 若 b 是 F 中元素的平方, G 为 Klein 四元群;

(2) 若 b 不是 F 中元素的平方, 但 $b^2 \in F$ 一定, 则 G 是 4 阶循环群;

(3) 若 $b \notin F$, $b^2 \notin F$, $b^3 \in F$ 都不是 F 中元素的平方, 则 G 是 8 阶群.

§ 6.6 尺规作图问题

本节我们讨论直尺与圆规作图问题. 什么是直尺与圆规作图问题呢? 依照希腊人柏拉图的观点, 最“完美的”几何图形就是直线和圆. 作几何图形的工作只能是圆规与直尺(无刻度), 仅用这两种工具, 哪些图形可以作出, 这就是所谓的直尺与圆规作图问题.

用圆规和直尺可以作出许多图形, 可以把一条线段分成任意多个相等的线段, 可以把 \angle 角三等分, 可以画一条与已知直线平行的直线, 以及作三角形和正方形等. 然而已有一些几何作图问题, 仅用圆规与直尺这样的工具是不充分的. 两千多年前, 古希腊人留给我们四个著名的几何作图难题, 它们是:

(1) 化圆为方:

能否用圆规和直尺作出一个正方形使其面积与给定圆的面积相等.

(2) 立方倍积:

对于任意一个正立方体, 能否用圆规和直尺作出一个立方体, 其体积是原立方体体积的 2 倍?

(3) 三等分任意角:

能否用圆规和直尺三等分任意角?

(4) 分圆问题:

对于 $\forall n \geq 3$, 能否用圆规和直尺作出一个正 n 边形?

毫不奇怪, 古希腊人发现解决以上这些问题, 实在是太难了, 他们只用圆规和直尺无法作出这些图形. 但是他们也不能证明这些图形不能作出, 因而他们花费了大量的人力才智去探讨这些问题的解法, 特别是阿基米德使用极限的技巧取得了 $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ 这样惊人的成就, 但是仍然无助于问题的解决.

这些问题在历史上一直困扰着人们, 直到 19 世纪末, 这些问题直到 19 世纪才被证明是不可能问题. 我们可追溯到 17 世纪的工作. 首先, 韦达把代数数和几何联系起来, 已使我们能把几何问题转化为代数问题. 这样我们再利用域扩张和 Galois 理论可以给出上述 4 个问题一个圆满的答案, 因而也是用代数方法解决几何

问题的典范。但是,由于中学里不可能学习近世代数,因而不断有一些具有中学数学知识的青年还在研究这些问题,应该劝告他们不要再在这些问题上浪费时间。下面来看近世代数是如何解决这些问题。首先,我们要把这些问题化为近世代数的问题。

为了阐述尺规作图的「能作」的必要条件,我们首先需把几何问题转换成代数语言。为此,还需把尺规作图的准则再强调一下。

1. 几何作图问题的代数提法

设在平面上已知 m 个点,我们选择直角坐标系并确定点 $(1, 1)$, 并设在此坐标系中已知的 m 个点的坐标为 $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m$, 令 $P = \{x_1, y_1, \dots, x_m, y_m\}$, 从这些已知点出发通过有限次下列操作可构造出的点称为可构造点, 对应的坐标称为可构造数。这些操作是:

- (1) 过已得到的两点画一条直线;
- (2) 以某点为圆心, 以某两点之间的距离为半径画圆;
- (3) 计算并标出两直线的交点坐标;
- (4) 计算并标出一直线和一圆的交点坐标;
- (5) 计算并标出两圆的交点坐标。

因而尺规作图问题化为求所有可构造数的问题。

整个平面几何作图问题就是从已知点(直线、圆等), 用圆规和直尺作出已合已知条件的几何图形。整个几何作图问题就是利用我们的假设计作一些适当的点、线和圆。但点、线和圆都可用坐标来描述。故几何作图问题可以看作由已知点作出合已知条件的点、线问题。又因为, 点、线、圆点的问题可看作复数的问题。因为我们将讨论的尺规作图, 允许从有限个复数出发, 得到所求的复数。这样作图问题完全转化为代数问题。为此我们, 建立下列概念。

设 F 是域, 域 F 称为 F 的 n 方根域, 若 $F = F(\alpha)$, 其中 $\alpha^n \in F$, 记 $\alpha = \sqrt[n]{a}$, 且 $a \in F$, 一个域扩张链

$$F = F_0 \subset F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subset F_k \subset C$$

称为 n 方根域链, 若对每个 i , F_i 是 F_{i-1} 的 n 方根域。

2. 可构造数基本定理

定理 6.6.1 设 K 是所有可构造数的集合, 则 K 是实数域 R 的子域, 是有理数域 Q 的扩域, 即 $Q \subseteq K \subseteq R$ 。

证明 首先证 K 是一个数域, 对任何 $x, y \in K$, $x \pm y$ 可用圆规、直尺做出(以下简

称“可做出”,故 $a \neq 1 \in K$, a 可做出. 从而, $a \in K$, 对 $\forall a \in K, a \neq 0$, a 可做出, 故 $0 \in K$, 所以 K 是一个域. 再证 K 是 \mathbb{Q} 的扩张. 由于已知 $1 \in K$, 故 $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ 中元素均可做出, 从而 $\mathbb{Q} \subset K$. 最后, 证 K 是 \mathbb{R} 的子域, 且直线与圆的交点坐标和圆之间的交点坐标均满足 $x^2 + y^2 = 1$, 从而, 证 K 对 $+$, $-$, \cdot 及正数的开平方运算, 且正数 a 开平方, 做出. 从而, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \in K$, 即 $K = \mathbb{R}$.



图 6.5

定理 6.6.2 可构造数的充要条件是 \mathbb{Q} 数. 可构造的充分必要条件是存在一个有限的域链:

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n = \mathbb{R},$$

满足 $(K_{i+1}:K_i) = 2 (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 和使 $\sigma \in K_n$.

证明 先证充分性. 设 \mathbb{Q} 域扩张 $\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n = \mathbb{R}$, 对 \forall 作四次运算可得 \mathbb{Q} 中任何元素, 故 \mathbb{Q} 中元素均可做出. 从而, $\forall a \in \mathbb{Q}, a \neq 0$, $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ 中任何数均可做出, 现设 K_i 可做出, 证 K_{i+1} 中任何元素均可做出.

因为 $K_{i+1}:K_i = 2$, 故设 K 在 K_i 上线性扩张且基为 $1, \theta$, 则 θ^2, θ 线性相关, 存在 $a, b \in K_i$ 使 $a\theta^2 + b\theta + c = 0 (a \neq 0)$, 得

$$\theta = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a),$$

知 θ 可做出, 且 $K_i \subset K_{i+1} = K_i(\theta) = K_i + K_i\theta + K_i\theta^2 \subset K_{i+1}$, 以 K_i 中任何元素均可做出, 以此类推, 得 K_n 上任何元素均可做出, 从而 \mathbb{R} 可做出.

证必要性 设 α 可构造, 则在 \mathbb{Q} 上通过有限步操作 $+$, $-$, \cdot , $/$ 可得到 α , 设在这有限步操作中逐次作出数 $a_1, a_2, \dots, a_m = \alpha$, 并令

$$K_i = K_{i-1}(\alpha_i) (i = 1, 2, \dots, m).$$

由于每次操作是对已知可构造数进行四则运算或开方, 故 $K_i:K_{i-1} = 2$ 或 ∞ . 由此可得如上之域链.

推论 6.6.3 可构造数的必要条件 若 $\alpha \in \mathbb{R}$ 可构造, 则 $(\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}) = 2^m, m$ 为正整数.

3. 若干几何作图问题的解

根据以上定理, 即可证明中, 角倍, 立方问题与圆化方问题都是不可能用规直

尺解决的. 对于三等分任意角问题有以下定理.

定理 6.6.4 角 φ 可以三等分的充分必要条件是多项式 $4x^3 - 3x - \cos\varphi$ 在 $\mathbf{Q}(\cos\varphi)$ 上可约.

证明 首先, 由已知 φ 可做出 $\cos\varphi$. 设 $\psi = \varphi/3$, 由公式

$$\cos\varphi = \cos 3\psi = 4\cos^3\psi - 3\cos\psi$$

可得 $\cos\psi$ 是多项式 $f(x) = 4x^3 - 3x - \cos\varphi$ 的根.

先证必要性. 设 φ 可三等分, 则 $\psi = \varphi/3$ 可做出, 令 $F = \mathbf{Q}(\cos\varphi)$, 由定理 6.6.1 推论得, $F(\cos\psi):F$ 是三次扩张, 所以 $(F(\cos\psi):F) = 3$, 故 $f(x)$ 在 F 上可约.

再证充分性. 若 $f(x)$ 在 F 上可约, 则 $\cos\psi$ 是 F 上的一个次数 ≤ 2 的多项式的根, 故有 $(F(\cos\psi):F) \leq 2$, 由定理 6.6.3, $\cos\psi$ 可做出.

关于分圆问题, 讨论如下. 首先, 由 π 不能三等分可得出: 正 n 边形不能做出, 因为不能将圆周任意 n 等分. 我们先证以下结果.

定理 6.6.5 设 f 是素数, 若正 f 边形可做出, 则 f 是如下形式的费马素数: $f = 2^{2^m} + 1$, m 为不小于零的整数.

证明 设 $\zeta = \cos \frac{2\pi}{f} + i \sin \frac{2\pi}{f}$, 若正 f 边形可做出, 即 $\cos \frac{2\pi}{f}, \sin \frac{2\pi}{f}$ 可做出, 由 1 推论得出,

$$\mathbf{Q}(\cos \frac{2\pi}{f}, \sin \frac{2\pi}{f}):\mathbf{Q} = 2^k, \mathbf{Q}(\cos \frac{2\pi}{f}, \sin \frac{2\pi}{f}, i):\mathbf{Q} = 2^{k+1},$$

而 $\mathbf{Q}(\zeta) = \mathbf{Q}(\cos \frac{2\pi}{f}, \sin \frac{2\pi}{f}, i)$, 所以 $[\mathbf{Q}(\zeta):\mathbf{Q}] = 2^k, k = 0, \dots$

另一方面, ζ 是多项式 $f(x) = x^f - 1 = (x-1)(x^{f-1} + x^{f-2} + \dots + x + 1)$ 的根, $f(x)$ 在 \mathbf{Q} 上不可约, 故有 $[\mathbf{Q}(\zeta):\mathbf{Q}] = f - 1$. 由此得 $f - 1 = 2^k$, $f = 2^k + 1$. 由于 f 为素数, k 必须是 2^m 的幂, 所以 $f = 2^{2^m} + 1$.

由定理 6.6.5 可以得到三等分任意角问题否定的回答, 只举反例即可.

例 6.6.1 三等分任意角.

取 $\varphi = \pi/3$, 则 $F = \mathbf{Q}(\cos\varphi) = \mathbf{Q}$, 多项式 $f(x) = 4x^3 - 3x - \cos\varphi = 4x^3 - 3x - 1/2$ 在 \mathbf{Q} 上不可约, 无“高次代数”内容, 所以 φ 不能三等分.

例 6.6.2 化圆为方.

不妨取圆的半径为 1, 那么圆的面积为 π . 将它化为等面积的长方形, 就是要求满足 $x^2 = \pi$ 的正方形边长 x , 但 π 是超越数, 不存在有理系数多项式以 π 为根, 故 x 对 \mathbf{Q} 亦为超越元, 它不可能从 \mathbf{Q} 出发用尺规作出.

例 6.6.3 立方倍积.

不妨取立方体的一边长为 1, 作出体积是它 2 倍的立方体即是要求满足 $x^3 = 2$ 的复

数 i 值, 在 \mathbb{Q} 上的次数为 i , 不是 $\frac{n}{2}$ 的幂, 故不能用尺规作出.

例 6.6.4 正 $n (\geq 3)$ 边形作图问题.

ζ_n 可用尺规作出 $\Leftrightarrow \zeta_n$ 的次数 $\varphi(n)$ 为 2^k 的方幂, 从而推出 $\zeta_n = \zeta_{2^k} \zeta_{n/2^k}$, 而 $\zeta_{2^k} = \zeta_{2^{k-1}}^2$, 我们称 ζ_{2^k} 称为费尔马素数. 因此, 只有当 n 能分解成 2^k 的方幂与有限个费尔马素数的积时, n 边形才能用尺规作出. 已知的费尔马素数有 $3, 5, 17, 257$ 和 65537 .

首先, 由 π 不能三等分可得证, 正 n 边形不能做出, 因而不能将圆周任意 n 等分. 我们在这里只讨论素数边形的作图问题.

设 p 是一个素数. 显然, 一个正 p 边形的作图问题等价于要作出点 $z = \cos \frac{2\pi}{p} + \sin \frac{2\pi}{p} i$. 它是多项式 $x^p - 1 = (x - 1)(x - \zeta_p)(x - \zeta_p^2) \cdots (x - \zeta_p^{p-1})$, 于是 z 适合一个 $p-1$ 次多项式 $x^p + x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$.

Eisenstein 判别法不难证明, 这是 \mathbb{Q} 上的一个不可约多项式, 即是 z 的极小多项式.

若这个 p 边形可用尺规作出, 则 $p-1 = 2^k$, 或 $p-1 = 2^k q$.

从这一串记号, 我们推出正 p 边形 (正 n 边形等) 不能用直尺与圆规作出, 因为此素数不能写成 2^k 的形式. 我们进一步进行更深入的讨论, 设上述 m 含有一个奇数因子, 比如 $m = kq$, 其中 q 是奇数, 则

$$2^m + 1 = 2^{kq} + 1 = (2^k)^q + 1 = (2^k + 1),$$

即这样, $2^m + 1$ 是一个合数. 因此要使 $2^m + 1$ 是素数, m 必须具有形状 2^k 形如 $2, 4, 8, \dots$ 的素数称为 Fermat 数. Fermat 猜想形如 $2^{2^k} + 1$ 的数都是素数, 正由 q 指出这个猜想不成立, 因为 $2^{2^k} + 1$ 是一个合数. 当 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ 时, $2^{2^k} + 1$ 确实都是素数, 它们依次为

$$3, 5, 17, 257, 65537.$$

这是迄今人们所知的全部 Fermat 数. 有人猜测这仅仅是五个 Fermat 数, 但至今未能证实, 也未能否定.

现在, 我们得到了一个正 p 边形可用圆规、直尺作出的必要条件是 p 是一个 Fermat 素数.

Gauss 定理 正 n 边形可用尺规作出的充分必要条件是 $n = 2^k p_1 \cdots p_r$, 其中 $k \geq 0, p_i$ 为互不相同的 Fermat 数.

对已知的五个 Fermat 数, 正 n 边形的作图都已被人具体地构造出来. 比如正十七边形的作图是 Gauss 18 岁时的惊人之作, 而正 257 边形及正 65537 边形虽然已被人作出, 但因无什么重要价值而未配放进博物馆供人欣赏.

例 6.6.5 下面我们给出正十七边形的作法.

令 $\theta = 2\pi/17$, $\varepsilon_k = (\cos k\theta, \sin k\theta)$, $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{16}$ 是方程 $x^{17} - 1 = (x-1)(x^2 + \dots + x^{16})$ 的零点.

下面我们用初等技巧证明 $\cos\theta$ 可由根式表示,从而正 17 边形可由直尺与圆规作出.

因为 3 为模 17 的原根,我们有

$$\begin{aligned} 3^0 &= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \\ 3^8 \pmod{17} &= 1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6 \end{aligned}$$

定义

$$x_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_9 + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{16} + \varepsilon_{10} + \varepsilon_5 + \varepsilon_4 + \varepsilon_2,$$

$$x_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_{10} + \varepsilon_5 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{14} + \varepsilon_7 + \varepsilon_{12} + \varepsilon_6,$$

$$y_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{16} + \varepsilon_4,$$

$$y_2 = \varepsilon_9 + \varepsilon_{15} + \varepsilon_8 + \varepsilon_2,$$

$$y_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_{14} + \varepsilon_{12},$$

$$y_4 = \varepsilon_{10} + \varepsilon_{11} + \varepsilon_7 + \varepsilon_6.$$

我们有

$$\varepsilon_k + \varepsilon_{17-k} = 2\cos k\theta, k = 1, 2, \dots, 16$$

从而又有

$$x_1 = 2(\cos\theta + \cos 8\theta + \cos 4\theta + \cos 2\theta),$$

$$x_2 = 2(\cos 3\theta + \cos 7\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta),$$

$$y_1 = 2(\cos\theta + \cos 4\theta),$$

$$y_2 = 2(\cos 8\theta + \cos 2\theta),$$

$$y_3 = 2(\cos 3\theta + \cos 5\theta),$$

$$y_4 = 2(\cos 7\theta + \cos 6\theta).$$

又 $x_1 + x_2 = -1$, 另一方面, 利用上面二式及三角恒等式

$$2\cos m\theta \cos n\theta = \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta,$$

又有 $x_1 x_2 = -1$, 因而 x_1 和 x_2 都是多项式 $x^2 + x + 1$ 的零点, 且 $x_1 \neq x_2$, 类似地 $y_1 + y_2 = -1$, 因而 y_1 和 y_2 又是多项式 $x^2 + x + 1$ 的零点, 且 $y_1 \neq y_2$, 同理 y_3 和 y_4 又是多项式 $x^2 + x + 1$ 的零点, 且 $y_3 \neq y_4$, 现在我们有

$$2\cos\theta + \cos 4\theta = y_1, 4\cos\theta \cos 4\theta = 2(\cos 5\theta + \cos 3\theta) = y_3,$$

可以验证 $2\cos\theta, 2\cos 4\theta$ 是多项式 $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ 的零点, 且 $\cos\theta \neq \cos 4\theta$.

解方程

$$x^2 + x - 4, x^2 - x_1x + 1, x^2 - x_1x - 1, x^2 - y_1x + y_1,$$

得

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1/16 \sqrt{17} - 1 + \sqrt{34} - 2 \sqrt{17} \\ &\quad + 2 \sqrt{17 + 3 \sqrt{17} + \sqrt{170 - 26 \sqrt{17}}} - 4 \sqrt{34 + 2 \sqrt{17}} \end{aligned}$$

最后,利用 Galois 理论给出著名的代数基本定理的另一个证明.

引理 6.6.6 $\mathbf{R}[x]$ 的每个奇数次多项式 $f(x)$ 必有实根,进一步地, \mathbf{R} 没有大于 1 的奇数次扩张.

证明 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \mathbf{R}[x]$,

$$\begin{aligned} \text{令 } t = 1 + \sum_{i=1}^n a_i t^i, \text{ 于是对所有的 } t, a_i = t^i - t^{i+1}, \text{ 令 } h(t) = f(t) - t^n, \text{ 则} \\ h(t) = [a_0 + a_1t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + a_nt^n] \\ - [t - 1 + t + \cdots + t + t - 1]t^n. \end{aligned}$$

故 $-t^n \leq h(t)$, 因而 $f(t) = h(t) + t^n \geq 0$.

另一方面,类似地可得 $f(-t) = h(-t) + (-t)^n$, 于是又有 $f(-t) = h(-t) + (-t)^n \leq (-t)^n$.

当 n 为奇数时,就是 $f(-t) \leq 0$. 连续函数的介值定理知,存在一个实数 r 使得 $f(r) = 0$, 即 $f(x)$ 有一个实根.

设 F 是 \mathbf{R} 的有限扩张域, 对于 $x \in F$, 设 ϕ 在 $\mathbf{R}[x]$ 上的极小多项式为 $p(x)$, 由推论 4.5.5 知

$$[\mathbf{R}(\phi); \mathbf{R}] = \deg p(x),$$

由上述证明可得 $\deg p(x)$ 必为偶数.

代数基本定理 复数域 \mathbf{C} 上每个 n 次多项式有 n 个复数根.

证明 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_ix^i \in \mathbf{C}[x]$, 由 1.11 $f(x)$ 在 \mathbf{C} 内有一个根即可. 令 $f(x) = \sum_{i=0}^n c_ix^i$, 其中 c_i 是实系数, 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_ix^i$, 其中 $a_i = \sum_{j=1}^m u_j^i$, 从而 $f(x) = \sum_{j=1}^m f_j(x)$, 故 $f(x) = f_j(x) + \cdots + f_j(x)$. 若 $f(x)$ 有一个复根 α , 且 α 是 $f_j(x) = f_j(x)$ 的一个根. 反之, 若 α 是 $f_j(x) = f_j(x)$ 的一个根, 且 α 是 $f_j(x)$ 的根, 或是 $\bar{f}_j(x)$ 的根, 但若 α 是 $f_j(x)$ 的根, 则 α 是 $\bar{f}_j(x)$ 的根, 由此可得 $f(x)$ 有一个复根当且仅当 $f(x), \bar{f}(x)$ 有一个复根, 因而 $\mathbf{C}[x]$ 中每个实系数多项式有一个复根. 证.

设 $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ 是实系数 n 次不可约多项式, E 是 \mathbf{R} 的包含 \mathbf{C} 的 $(n+1)\rho(x)$ 的分裂域, 对 $f(x) \in \mathbf{R}[x]$, 故 $\mathbf{R}[x]$ 是 $\mathbf{C}[x]$ 扩张, G 是其 Galois 群 $G = 2^k k$, 其中 $m = 2^k$ 整除 k , 由第一章的 Sylow 定理, G 有 m 阶的子群 H , 令 $K = E^H$ 是与 H 对应

的中间域, 则 $R = K = E$, 从而 $K : R = (x) : (1) = x$, 得 $E = K$, 故 $(x) = (1)$.

因为 $x \in C$, 于是 $C : R = (x) = 2$, 又 $E : R = (x) = E : C = C : R$, 由此得 $[E : C] = 2$. 若 $m = 1$, 则 $(x) \in C$ 有 2 阶正规子群 Δ , 由 Galois 理论的基本定理

$$[E : E^N] = [N], \text{ 且 } [E^N : C] = [E : C] / [E : E^N] = 2,$$

于是 E 是 C 上二次扩张. 因为 $x \in C$, 故由三次方程的求根公式可知, C 上三次多项式均为可约多项式, 这是一个矛盾, 故 $m = 1 = 0$, 从而 $E = C$.

拉格朗日小传

拉格朗日(J. L. Lagrange, 1736年1月25日出生在意大利, 祖先是法国人. 早年他阅读一篇由英国大数学家哈雷(H. H. Halley, 1656—1742)写关于生数微积分的论文, 就深深地被数学所吸引. 17岁, 他就成为皇家电话学院的数学教授. 拉格朗日对数学和物理的许多领域有过重要的贡献, 这些领域包括数论、方程论、微分方程和微分方程、变分学、解和几何、流体力学以及天体力学.

Lagrange 关于用根式求解一元二次和三次代数方程的方法为 Gauss 用群论方法解多项式的理论(Galois 理论)的建立打下了扎实的基础. Lagrange 还是一个很好的作家, 他的文笔流畅, 风格清新. 1787年, Lagrange 被任命为柏林科学院的院长, 以接替欧拉. 1787年, 他应路易十六的邀请访问巴黎, 成为国王和国民的亲密朋友.

1792年, Lagrange 领导了一个委员会(包括卡瓦拉斯和法国化学家拉瓦锡 A. L. Lavoisier, 1743—1794)在内的委员会, 致力于设计一种新的重量和长度系统, 其结果是米制的诞生. 他曾第一次获得法国科学院奖金.

Lagrange 于1813年4月10日在巴黎逝世.

问题 6.6

1. 求下列扩张的 Galois 群 G :

(1) $Z/\langle p \rangle (\omega)$ 关于 $Z/\langle p \rangle$ 的 Galois 群;

(2) $Q(\omega)$ 关于 Q 的 Galois 群. (这里 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$)

2. 令 $f = (x^2 - 1)^m$, (m 为复数域, $m = 0, 1, 2, \dots$), 求 f 的 Galois 群 G .

求证: (1) $\sigma^2 = e, \tau^2 = e, \sigma\tau = \tau^{-1}\sigma$;

(2) 求出 σ, τ 生成的子群 H .

3. 求 m 域 F 上的 n 次不可约多项式的分裂域 E 关于 F 的 Galois 群或对称群或是交代群.

4. 设 p, p, \dots, p 是 r 个不同的素数, 试求 F 关于 Q 的 Galois 群, 其中 $E = Q(\sqrt[r]{p})$.

$$\sqrt{p_2} \cdots \sqrt{p_r}).$$

(1) 令 $L = \mathbb{Q}(i)$, 求 F 关于 \mathbb{Q} 的 Galois 群, 求其子群所对应的子域.

(2) 试决定: 在 \mathbb{Q} 上的分裂域的所有子域及相应的 Galois 群 G 的子群.

设 F 是域 F 的可离正规扩张, G 为 $G = \text{Gal}(F/F)$ 群, 设 L 是 F 的子域, H 为 L 关于 F 的 Galois 群, 令 $N = \{\sigma \in G: \sigma(L) = L\}$, 证明:

- (1) N 是 H 在 G 中的正规化子;
- (2) L 关于 F 的 Galois 群 $G_{L/F} \cong N/H$.

8. (1) 设 F 为 \mathbb{Q} 的三次扩张, $K = F(\sqrt{3})$, 求 K 在 F 上的 Galois 群.

(2) 求 $x^3 - 2$ 在 $\mathbb{Q}(i)$ 上的 Galois 群.

9. 如果域 F 含有 n 次本原单位根, 且 $f(x) = x^n - 1 = (x - 1)(x - \alpha) \cdots (x - \alpha^{n-1})$, $\alpha \in F$, 在 F 上的分裂域, 那么 F 是 F 的 M -扩张, 且 M -群 G 中, 任一元素的周期必为 n 的因数.

设 $\alpha \in F$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x^n - \alpha$ 为不可约多项式且 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 上的 Galois 群 $G = S_n$, 设 F 是 \mathbb{Q} 上的分裂域, $\alpha \in F$ 为 $f(x)$ 的一根, 证明 $(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}) = n$, 但 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 关于 \mathbb{Q} 的 Galois 群 H 为单位元群.

10. 令 L 是实数域的子域, $f(x)$ 为 L 上不可约实多项式, 令 G 为 f 的 Galois 群, 如果 f 恰有两个实根, 那么 G 是 S_n 或 D_n 是 D_n 的子群.

11. 设域 F 上含有全部 n 次单位根, a 是 $f(x) = x^n - a$ 的任一正整数, 并且对 n 的任意因数 c , $a = b^c$ 与 f 在 F 中的无 c 方根. 试求 $F(\sqrt[n]{a}) = F(\sqrt[n]{b})$ 在 F 上的分裂域, 那么 $F(\sqrt[n]{a}) = F(\sqrt[n]{b}) \Leftrightarrow a = b^n c^n, c \in F(m, n) = 1$.

13. 试给出正五边形的作图步骤.

14. 能否用尺规三等分 $45^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ 角?

第7章 Lie 群的结构与对称性

Lie 群是群论中极其重要的部分, Lie 群是代数结构和几何结构的自然结合体, 它有相当完美的对称性. Lie 群的结构丰富, 而且有丰富的内在理论. 在很多领域, 例如研究数学中的特殊函数, 处理生物力学中的微分问题, 研究一般有序介质材料、液晶材料、超弹性材料以及许多工程领域都有广泛的应用.

Lie 群及相应的 Lie 代数早期主要用于原子和原子核的壳层结构, 后来在基本粒子物理学中得到最广泛的应用. 现代粒子物理学的基本假设是, Lie 群给出的对称模型的基本对称性可以以 $U(N^+)$ 、 $SO(N^+)$ 或 $SL(N^+)$ 代替. 各种统一模型则是 $U(N^+)$ 、 $SO(N^+)$ 、 E_6 等理论. 总之, 离开 Lie 群, 现代粒子理论就无从谈起.

Lie 群是特殊的连续群, 本章主要研究 Lie 群的对称性质.

§ 7.1 群代数和群流形

定义 7.1.1 如果对于群 G 的每一个元素, 都有一个确定的数 $f(x)$ 与之对应, 即 $\forall x \in G$, 有映射 $f: x \rightarrow f(x)$, $\forall x \in G$ (x 为群 G 的复数域), 称集合 $\{x \in G\}$ 为群函数, 简称为 $f(G)$.

对于有限群, 群函数可取 \mathbb{R} 值, 即 $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\sum_{g \in G} f(g) = n$ 与群 G 的阶 n 相等, 若 $f(g) \geq 0$, ($\forall g \in G$), 则 $\overline{f(G)} \geq 0$, 并具有线性性质:

$$a\overline{f_1(G)} + b\overline{f_2(G)} = \overline{af_1(G) + bf_2(G)}.$$

由重排定理, 若 $g_j \in G$,

$$f_1(g_j) = \frac{1}{n} \sum_{g_i \in G} f_1(g_i) = \frac{1}{n} \sum_{g_i \in G} f_2(g_i) = \frac{1}{n} \sum_{g_i \in G} f_1(g_i) = \frac{1}{n} \sum_{g_i \in G} f_2(g_i).$$

定义 7.1.2 以群元 x 作为基, 其所有线性组合构成 n 维线性空间 L , 其中任意向量 $X = \sum_{g_i \in G} f_i(g_i)g_i$, $Y = \sum_{g_i \in G} f_i(g_i)g_i$ 和 $f_i(g_i)$ 为群 G 的群函数, 在 L 上定义加法满足通常线性空间的矢量加法规则:

$$c_1 X + c_2 Y = \sum (c_1 f(g_i) + c_2 \varphi(g_i)) g_i.$$

再定义 L_n 中数乘运算(内积):

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \sum_{g_i \in G} f(g_i) g_i^{-1} \cdot \sum_{g_j \in G} \varphi(g_j) g_j \\ &= \sum_{g_i, g_j \in G} f(g_i g_j^{-1}) g_i g_j^{-1} \varphi(g_j) g_j \\ &= \sum_{g_i, g_j \in G} f(g_i g_j^{-1}) \varphi(g_j) g_i \in L_n, \end{aligned}$$

则 L_n 是封闭的, 构成代数.

数论实际上包含代数、流形和拓扑学的概念. 我们在此简述以后要用到的拓扑和流形最基本的概念.

定义 7.1.3 设有 n 集合 A 的一个族 $\{A_i\}$, 其中脚标为 $1, 2, 3, \dots$, 也可以是连续变化的. 如果对任何有限族 $\{A_i\}$, 有 $\bigcup A_i \in A$, 且对任何有限族相交, 有 $\bigcap A_i \in A$, 则称并集为构成拓扑空间 (A, A) .

例 7.1.1 n 维欧氏空间 E_n . 令 $A = \{S(a_i, r_i)\}$, a_i 为 E_n 中任意点的位置矢量, a 为某点的位置矢量, 令 $r = |a - a_i|$, 即在以 a_i 为球心, r 为半径的球内 (不包含球面). 显然 $S(a_i, r)$ 为开集, 则

$$A = \bigcup S(a_i, r) \in E_n, \quad \bigcap S(a_i, r) \in E_n.$$

因 (A, E_n) 构成拓扑空间, A 则为 E_n 的一个拓扑.

定义 7.1.4 如果开集 A 的数目有限, 则称 $A = \bigcup A_i$ 为紧致空间.

例 7.1.2 E_n 内任何有界区域 I , 它总可用有限个开集 $S(a_i, r_i)$ 的并集所覆盖.

例 7.1.3 任何有限个集合构成的并集是紧致的.

例 7.1.4 n 维平移群 T . 令 $I = \{T(a_i)\}$ 代表直线 (到原点距离为 a_i 的一个点, 则 $T(a_i)$ 在直线各点连续运动所得到的集合表示一条无限长直线或 E_1 (图 7.1).



图 7.1

显然, I 是非紧致的, 而其任何有限部分为紧致. I 就是群流形的实例.

定义 7.1.5 称群流形的体积为群体积.

例 7.1.5 令 I 群的群元 $\mu = T(a)$, 定义相应群流形体积元为

$$d\mu(g_i) = da_i,$$

则对于固定群元素 $g \in T$, $d\mu$ 是 $U(1)$ 不变的. 事实上,



图 7.2

$$d\mu(g, g_i) = d\mu(g, g_i) = d\mu(g_i) = da_i \equiv da.$$

整个群 T 的体积

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(g_i) \approx \int_{-\infty}^{\infty} da \rightarrow \infty.$$

如果群流形是封闭和有界的, 则群是紧致的, 否则为不紧致的. 由于 $U(1)$ 为不紧致的, 这样, 我们从 $U(1)$ 的角度又得到例 7.1.6 的结论.

例 7.1.6 相角因子群 $U(1)$.

定义 $U(1)$ 群元 $U(\theta) = e^{i\theta}$, 其中 $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ 为实数域. 因此, $U(1) = \{U(\theta) | 0 \leq \theta < 2\pi\}$.

$$\begin{aligned} U(\theta)U(\theta')U(\theta'')z &= U(\theta)(ze^{i\theta'}) = ze^{i\theta} \\ &= ze^{i(\theta+\theta')} = U(\theta')U(\theta)z. \end{aligned}$$

即 $U(1)$ 为 Abel 群.

$$U(\theta')U(\theta) = U(\theta + \theta') = U(\theta' + \theta).$$

与群 T_1 不同的是,

$$U(\theta + 2\pi) = U(\theta).$$

下面给出 $U(1)$ 群的流形. 一个 $U(1)$ 表示由单位圆上的点组成, 如图 7.3 所示. 随着实参数 θ 在实数域从 0 到 2π 变化, 代表 $U(1)$ 的圆由点组成. 由于单位圆在实数域中是流形有界, 流形有界, 故此群为紧致群. 作群积分:

令 $g_i = U(\theta_i)$, $d\mu(g_i) = d\theta_i$. 显然,

$$d\mu(g_i) = d\mu(g_j g_i) = d\mu(g_j g_i) = d(\theta_i) \equiv d(\theta) = \cos \theta$$

故群体积

$$V = \int_{U(1)} d\mu(g_i) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

可知 $U(1)$ 为不紧致的. 这样, 我们从 $U(1)$ 的角度又得到了例 7.1.6 的结论.

例 7.1.7 三维旋转群 R_3 [以后记为 $O(3, R)$].

$\forall x \in R$, 群元 x 可用单位向量 x 绕 x 轴旋转 ψ 表示. ψ 用 π 表示. 取半径为 π 的球体, 令球与 x 轴相切. l 表示转动 x 轴, ψ 其中 π 是 $O(3)$ 的力矩.



由 $OP = \Psi$, 则群流形即为此球(图 7.1), 但不包括球面, 显然流形是有界的, 故 R_3 也是紧致的.

将 n 用球坐标表示 $n = n(\sin\theta, \cos\varphi\Psi, \sin\theta\sin\Psi, \cos\theta)$, 则 $g = g(\Psi, \theta, \varphi)$, 不变体积元为 $d\mu(g) = \Psi^2 d\Psi \sin\theta d\theta d\varphi$, 群流形体积

$$V = \int d\mu(g) = \int_0^\pi d\Psi \cdot \Psi^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi$$

至于为何 Ψ 只取到 π 的原因是在 $\Psi = \pi$ 时, 绕 n 转动 π , 与绕 $-n$ 转动 $-\pi$ 所表示的是相同的. 因此在球面上直径两端点 P' 与 P'' 系表示相同转动, 由此出现 G 在拓扑上有双连支结构, 从而导致双值表示等等问题的出现. 这反映物理上一个转动, 可以在右手系中实现, 亦可在左手系中实现, $G = R_3$ 只取右手系, 故 $\Psi = \pi$. 因为在 $\pi - \Psi = \pi$ 所表示的是相同转动, 可通过反向转动得到.

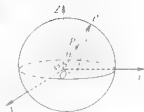


图 7.1 R_3 的流形

例 7.1.8 么正群 $U(n)$.

$U(n)$ 的群元为 $n \times n$ 么正矩阵, 即

$$U = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $\forall i, j = 1, 2, \dots, n, \Omega_{ij}(t)$ 为 n 个复参数, 群流形为 n 维酉空间, 么正条件为 $U^{-1} = U^\dagger$, 其中 k 为 $n \times n$ 单位矩阵, A^\dagger 为 A 的共轭不变矩阵元

$$d\mu(g) = \left\{ \prod_{\mu, \nu} d(\operatorname{Re} A_{\mu\nu}) \prod_{\mu, \nu} d(\operatorname{Im} A_{\mu\nu}) \right\},$$

亦即对于流体体积

$$V = \left\| \frac{\partial(\operatorname{Re} A)}{\partial \ln A} \right\| \left\| \frac{\partial(\operatorname{Im} A)}{\partial \ln A} \right\| = \left\| \operatorname{Re} A \right\| \left\| \operatorname{Im} A \right\|,$$

其中 $\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^\dagger)$ 分别表示矩阵元 A 的实部与虚部. 但么正条件

$$\begin{aligned} A + A^\dagger &= E \rightarrow \sum_{\mu=1}^n (A^\dagger)_{\mu\mu} (A)_{\mu\mu} = \delta_{\mu\mu} \\ &\Rightarrow \sum A_{\mu\mu}^* A_{\mu\mu} = \delta_{\mu\mu} (\mu, \lambda = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

当 $\mu = \mu$ 时, 上式 $\sum_{\mu=1}^n |A_{\mu\mu}|^2 = 1 > \sum_{\mu=1}^n |A_{\mu\mu}|^2 = 1$, 亦即 $A_{\mu\mu} = 0, \mu = 1, 2, \dots, n$. $\operatorname{Re} A_{\mu\mu}$ 与 $\operatorname{Im} A_{\mu\mu}$ 均有界. 因此, 流形体积亦有限. $U(n)$ 群是紧密的.

定义 7.1.6 存在不变体积元, 但群流形体积无限, 这种群叫局部紧致群.

问题 7.1

1. 定义集合 $G = \{A\}$ 为 $n \times n$ 矩阵, $\det A = 1$, 且 $\forall 1 \leq \mu, \nu \leq n, \mu \neq \nu$, $n \in \Omega(C)$, 则集合记为 $GL(n, C)$, 且 $\forall 1 \leq \mu, \nu \leq n, \mu \neq \nu, n \in \Omega(R)$, 则集合记为 $GL(n, R)$, 证明 $GL(n, C)$ 与 $GL(n, R)$ 构成群, 它们的紧致性如何?

2. 设 $SL(n, C)$ 与 $SL(n, R)$ 的定义为

$$SL(n, C) = \{A | A \in GL(n, C), \text{且 } \det A = 1\};$$

$$SL(n, R) = \{A | A \in GL(n, R), \text{且 } \det A = 1\},$$

这里 SL 即特殊线性, 证明它们均构成群, 并讨论其紧致性.

定义集合 $SO(n) = \{A | A \in GL(n, R), \det A = 1, A^T = -A\}$, 这里 SO 为 Special Orthogonal, 即特殊正交, 证明该集合构成群, 并讨论其紧致性.

定义 $O(n, C)$ 与 $SO(n, C)$ 为 $O(n, C) = \{A | A \in GL(n, C), \det A = 1, A^T = -A\}$, $SO(n, C) = \{A | A \in GL(n, C), \det A = 1, A^T = -A, \det A = 1\}$, $SO(n, C)$ 与 $SO(n, R)$ 表示正交, 特殊正交, 证明它们构成群, 并讨论其紧致性.

若 $O(n, C)$ 与 $SO(n, C)$ 集合上, $\forall 1 \leq \mu, \nu \leq n, \mu \neq \nu, n \in \Omega(R)$, 则记为 $O(n, R)$ 与 $SO(n, R)$, 则两集合依然构成群, 并讨论其紧致性. 且 $SO(n, R)$ 存在也记为 R , 故, 矩阵力群. 定义集合 $Sf(n, C)$ 为 $Sf(n, C) = \{A | A \in GL(n, C), \det A = 1, A^T = A\}$, 证明任何 $\forall 1 \leq \mu, \nu \leq n, \mu \neq \nu, n \in \Omega(C)$, 集合 $Sf(n, C)$ 构成群, 称为辛群, $GL(n, C)$, $U(n)$, $O(n, C)$ 和 $Sp(2n, C)$ 统称典群.

给出群 $SL(n)$ 的群外形, 计算其群体积. 提示: 考虑 $SL(n, C)$ 与实数个数

§ 7.2 拓扑群及其表示

让我们先来举几个拓扑(紧致)群的常见实例.

例 7.2.1 有限群, 任何有限群, 例如, 对于离散拓扑来说, 构成一个拓扑(紧致)群.

例 7.2.2 复模复数群, 所有复模复数 z , $|z| = 1$, $z \in \pi$ 有乘法运算下构成一紧致群. 它是连通的, 可交换的, 以符号 S^1 表示之.

例 7.2.3 复模实数群, 所有实模实数 x , $|x| = 1$, $x \in \pi$ 有乘法运算下构成一紧致群. 它是连通的, 可交换的, 以符号 S^1 表示之. 复模实数群 S^1 可视为 \mathbb{R} 上的二维单位球面, 以 S^1 表示之.

例 7.2.4 n 维欧氏空间的正交变换群. 设 \mathbb{R}^n 是一个 n 维欧氏空间, 对其上的所有

正交(亦即正交)变换构成一个拓扑群,叫做正交群,以符号 $O(n)$ 表示之.

例 7.2.5 n 维欧氏空间的酉变换群. 设 C 是一个 n 维欧氏空间,对其上所有的酉变换(即使 $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z)$ 对任何 $(x, y, z) \in C$ 恒成立)的变换,构成一个拓扑群,叫做 n 阶酉群,以符号 $U(n)$ 表示之. 不难看出 $U(1) = S^1$.

现在给出拓扑群和紧致群的定义.

定义 7.2.1 设 G 是一个非空集合,假如:

- 1) G 为一个群;
- 2) G 为拓扑空间;
- 3) G 中所具有的群的运算, $(a, b) \mapsto a \cdot b; a \mapsto a^{-1} (a, b \in G)$,

在拓扑空间中是连续的,那么就称 G 为拓扑群.

若在一个拓扑群 G 中,紧緻性及求 I 称为紧緻拓扑群,简称紧緻群.

对于一个拓扑群 G ,上给定的连续函数 $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ 或 \mathbb{R} , I 是 G 上的右平移

$$\rho_a: G \rightarrow G, \quad \rho_a(x) = x \cdot a,$$

而得出新的函数 $f_a(x) = f(x \cdot a)$.

紧緻群的一个重要特性是对于其上的连续函数 f ,有一个自然的求平均值的运算,它是一个满足下列条件的映射 $I: C(G) \rightarrow C(G)$ 或 \mathbb{R} ,其中 $C(G)$ 表示 G 上连续函数全体组成的集合,即

- 1) 不变性: $I(f_a) = I(f), f \in C(G), a \in G$;
- 2) 线性性: $I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g), f, g \in C(G), \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ 或 \mathbb{R} ;
- 3) I 在 $C(G)$ 中处处为实,对 I 而言, I 恒等于零,且 $I(1) = 1$.

- 4) 若 $f = c$ (常数),则 $I(f) = c$.

例 7.2.6 设 G 是一个有限群,则显然可以定义

$$I(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \quad (|G| = G \text{ 的元素个数})$$

是 f 的平均值,它满足 1) ~ 4).

例 7.2.7 以 $C(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{C}$, 则可以用积分来定义平均值如下

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta,$$

不难验证它也是满足 1) ~ 4) 的.

例 7.2.8 设 $G = \mathbb{S}^3$, 把它几何地想成 \mathbb{R}^4 中的单位球面,则可用 \mathbb{S}^3 上的体积元素 $d\sigma$ 来定义平均值如下:

$$I(f) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{S}^3(1)} f(x) d\sigma,$$

其中 $2\pi^2$ 是 \mathbb{S}^3 的体积,不难看出它也恒满足上述四条

定理 7.2.1 设 G 为一紧致群, $C(G)$ 为其上的所有复值(或实值)连续函数的集合, 则满足性质 1)~4) 的平均运算 $I: C(G) \rightarrow C(G)$ 唯一存在, 称之为 G 的(左)不变积分, 并用符号 $\int_G f(g)dg$ 表示 $I(f)$.

下面我们就要应用“平均法”来系统地证明紧致拓扑群的线性表示论. 在本节中, 我们将以符号 G 表示一个任意的紧致拓扑群, 且不再加说明. 设 V 是一个复线性向量空间, $(\rho, \rho(V))$ 是由 V 上 G 的线性变换 $\rho(g)$ 所组成的 G 的全线性群.

$(\rho, \rho(V))$ 线性变换全体组成可约群 $(\rho, \rho(V))$. 自然, G 和 $\rho(V)$ 同构. 在 $\rho(V)$ 上引入 G 或 $\rho(V)$ 的拓扑结构, 于是 $(\rho, \rho(V))$ 是 $\rho(V)$ 中子集, 易见 $(\rho, \rho(V))$ 是一个拓扑群.

定义 7.2.2 若映射 $\varphi: G \rightarrow \rho(V)$ 是拓扑群的同态映射(即, 作为群的映射是一一的, 作为拓扑 \rightarrow 拓扑的映射是连续映射), 称 φ 为 G 的“线性表示”, 简称为表示. 通常还用符号 (G, V) 来表示之.

本节中将以不变积分提供的工具去系统地来研究 (G, V) 线性表示.

定理 7.2.2 设 (G, V) 是一个复线性表示, 则 V 上必存在一个 G 不变的西积(内积), 即 $\langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle$, 对 $\forall g \in G, x, y \in V$ 恒成立.

证明 设 $\langle x, y \rangle$ 是 V 上的一个任选的西积(内积), 令

$$(x, y) = \int_G \langle gx, gy \rangle dg,$$

则对 $\forall a \in G$, 均有

$$(ax, ay) = \int_G \langle gax, gay \rangle dg = \int_G \langle gx, gy \rangle dg = (x, y),$$

所以 (x, y) 是 G 不变的西积(内积).

推论 7.2.3 设 $G = GL(n, C)$ 为 n 维复向量空间 V 上的全线性群. 这是一个紧致子群, 则必存在一个闭的 V 上的 $GL(n, C)$ 使得 $V \cap G = G$. 因此 G 是 $GL(n, C)$ 的一个极大紧致子群, 故 $V \cap G = G$ 为极大紧致子群都和 G 等价. 其他

证明 设 e_1, \dots, e_n 是 V 在原始西积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 下的标准正交基, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是在 V 上 G 不变的西积 (\cdot, \cdot) 下的“标准正交基”. 于是将 α_i 映到 e_1, \dots, e_n 的那些个在 $GL(n, C)$ 中的元素, 即得所欲证.

定义 7.2.3 (G, V) 和 (G, W) 之间若存在一个和 G 的作用可交换的线性同构

$$A: V \rightarrow W, \text{ 即 } A(gx) = gA(x),$$

则称 (G, V) 和 (G, W) 等价(或同构). 记 $\mathcal{L}(G, V) = \mathcal{L}(G, W)$.

同样, $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ 和 $\varphi': G \rightarrow GL(W)$ 是等价的充要条件是存在同构 $A: V \rightarrow W$, 使得 $\varphi' = A \circ \varphi$, 其中 $\sigma: \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(W)$ 的定义是 $\sigma(A) = AB A^{-1}, B \in GL(V)$.

定义 7.2.4 对于 (G, V) , 若有一个子空间 $U \subset V$ 在 G 的作用下不变, 即

$$G \cdot U = \{g \cdot x \mid g \in G, x \in U\} \subset U,$$

则称 U 为 G -不变子空间.

显然有, 0 和 V 本身是 G -不变的. 今在不致发生混淆的情况下, G -不变子空间简称为不变子空间.

定义 7.2.5 若一称 V 是 (G, V) 仅有的不变子空间, 则称 (G, V) 为不可约表示; 否则叫可约表示.

下面我们建立线性表示的几种常用的运算:

1. 和: 设 $(G, V_1), (G, V_2)$ 是 G 的两个线性表示, 我们可以在 $V_1 \oplus V_2$ 上赋以 G 的作用:

$$g(x, y) = (gx, gy), \quad x \in V_1, y \in V_2.$$

这个新的表示叫做原来两个表示之和, 记为 $(G, V_1 \oplus V_2) = (G, V)$. 若用 $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ 来记线性表示, 则它们的和记为

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2: G \rightarrow GL(V_1 \oplus V_2).$$

对偶: 设 (G, V) 是一个线性表示, V^* 表示 V 的对偶空间 (即 V 上所有的线性函数组成的向量空间), 在 V^* 上可如下规定 G 的作用 gf , 使得

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x), \quad f \in V^*, x \in V,$$

其中 $f \in V^*, x \in V, g \in G, \langle f, x \rangle = f(x)$.

容易验证, (gf) 还规定构成 G 到 V^* 上的一个线性表示, 称之为对偶表示, 记为 (G, V^*) . 若用 $\varphi_1: G \rightarrow GL(V)$ 来表示, 则 φ 的对偶表示记为

$$\varphi^*: G \rightarrow GL(V^*).$$

(2) 张量积: 把上述的规定推广到多线性函数, 设 $L(V_1, V_2, C)$ (或 R) 是 V_1, V_2 上所有双线性函数构成的向量空间,

$$\varphi_i: G \rightarrow GL(V_i), (i=1, 2)$$

是 G 在 V_1 及 V_2 上的表示.

规定 $(\varphi_1, \varphi_2)^*: G \rightarrow GL(L(V_1, V_2, C(或 R)))$ 如下:

$$(g \cdot f)(x_1, x_2) = f(g_1^{-1}x_1, g_2^{-1}x_2), (f \in L(V_1, V_2, C(或 R))).$$

在向量空间的张量积中, 我们用张量积把多线性函数关于单线性函数的讨论. 我们有

$$L(V_1, V_2, C) \cong L(V_1 \otimes V_2, C) = (V_1 \otimes V_2)^*.$$

再由对偶关系 $L(V_1, V_2, C) = (V_1^* \otimes V_2^*)^*$, 我们规定 φ_1, φ_2 的张量积 $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ 为:

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 = ((\varphi_1, \varphi_2)^*)^*.$$

容易验证:

证明 显然 $\varphi_A \in L(V, V)$ 且 $\lambda I = \lambda I \circ \varphi_A \in L(V, V)$, 对于所有的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 也成立. 由右, 在复数域中必存在一个 λ , 使得 $\lambda I = \lambda I$ 是 φ_A 的逆的, 由此由定理 7.1 即得, $\lambda I = \lambda I^{-1} = 0$, 亦即 $A = \lambda_0 I$.

定理 7.2.5 设 $\varphi, \psi \in L(V, V)$ 和 $\varphi, \psi \in L(V, W)$ 是两个不等价的复不可约表示, 在 V, W 上各取一个 G 不变西积, 从而各取一组标准正交基, 则可用西矩阵表达 $\varphi(g)$ 和 $\psi(g)$, $\varphi(g) = (\varphi_i(g))$, $\psi(g) = (\psi_{ij}(g))$,

它们之间具有下述正交关系:

$$\int_G \psi_{ij}(g) \cdot \overline{\varphi_{kl}(g)} dg = 0,$$

$$\int_G \varphi_{ij}(g) \cdot \overline{\varphi_{kl}(g)} dg = \frac{1}{\dim \varphi} \delta_{ik} \delta_{jl},$$

其中 $\dim \varphi$ 是不可约表示 φ 的表示空间的维数

证明 令 $\varphi \in V$ 和 $\psi \in W$ 的基 $\{e_i\}$ 和 $\{f_j\}$ 均已定义了 G 在 V 和 W 上的诱导作用, 即

$$g \cdot A = \varphi(g)A \varphi(g)^{-1}, A \in L(V, W).$$

由 G 的不变西积, 求轨道 $(g \cdot A) = \varphi(g)A \varphi(g)^{-1}$ 的平均值, 亦即取中心, 得到 $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g \cdot A)$, 不难验证, A 由正交基 $\{e_i\}$ 在 G 作用下得到的元素, 满足

$$A \cdot \bar{A} = \int_G (ag) \cdot A dg = \int_G g \cdot A dg = \bar{A}.$$

由式表明, $\varphi_{ij} = \langle \varphi_j, \varphi(g) \cdot e_i \rangle = \langle \varphi_j, g \cdot e_i \rangle$, 由引理 7.1.1 可得, $\varphi_{ij} = \langle \varphi_j, e_i \rangle$ 若可逆, 则 φ 和 ψ 就是等价的了. 因此 $\varphi \in L(V, W)$ 上任何元素 φ 现在我们取 E_{ij} , 即 $L(V, W)$ 中把 V 中第 j 个基向量射到 W 中第 i 个基向量, 而其他 E_{kl} 为零的那个线性映射, 则

$$E_{ik} = \int_G (\psi_{ij}(g)) E_{ik} (\varphi_j(g))^{-1} dg = 0.$$

把上式用矩阵算法直接写出, 就得到

$$\int_G \psi_{ij}(g) \cdot \overline{\varphi_{kl}(g)} dg = 0.$$

若取 $B \in L(V, V)$, 则类似可得

$$\bar{B} = \int_G g \cdot B dg = \int_G \varphi(g) B \varphi(g)^{-1} dg = \lambda(B) \cdot I,$$

其中 $\lambda(B)$ 是一个由 B 所确定的复数. 另一方面, 又有

$$I \cdot B = I \cdot \int_G \varphi(g) B \varphi(g)^{-1} dg = \int_G I \cdot \varphi(g) B \varphi(g)^{-1} dg = \int_G I \cdot B dg = I \cdot B,$$

也就是说, $I \cdot B = I \cdot B = \int_G \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle B dg = \int_G \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle \cdot \frac{1}{\dim \varphi} I \cdot B dg$.

同样地, 取 $B = E_{ij}$, 即得

$$F = \int \varphi(g) E_{ij} \varphi(g) dg = \frac{1}{\dim \varphi} I.$$

用矩阵算法就得 $\varphi_i(g) = \varphi_j(g) = \frac{1}{\dim \varphi} \delta_{ij} \delta_g$.

定义 7.2.7 对于给定的复(实)表示 $\varphi: G \rightarrow (GL(V))$, 令 $\chi_\varphi(g) = \text{tr} \varphi(g)$, $g \in G$, 称 χ_φ 为表示 φ 的特征函数.

不难看出, $\varphi \subseteq \psi \Rightarrow \chi_\varphi = \chi_\psi$.

特征函数有以下简单性质:

$$\chi_{\varphi \oplus \psi} = \chi_\varphi + \chi_\psi; \chi_{\varphi \otimes \psi} = \chi_\varphi \cdot \chi_\psi.$$

推论 7.2.6 若 φ 和 ψ 是 G 的两个不等价的复不可约表示, 则

$$\int_G \chi_\varphi(g) \cdot \overline{\chi_\psi(g)} dg = 0, \int_G \chi_\varphi(g) \cdot \chi_\varphi(g) dg = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{证明 } \int \chi_\varphi(g) \cdot \overline{\chi_\psi(g)} dg &= \int \left(\sum_i \varphi_{ii}(g) \right) \cdot \overline{\left(\sum_j \psi_{jj}(g) \right)} dg \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_G \varphi_{ii}(g) \cdot \overline{\psi_{jj}(g)} dg = 0, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \int \chi_\varphi(g) \cdot \chi_\varphi(g) dg &= \int \left(\sum_i \varphi_{ii}(g) \right) \cdot \left(\sum_j \varphi_{jj}(g) \right) dg \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_G \varphi_{ii}(g) \cdot \varphi_{jj}(g) dg = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{ii}}{n} = 1. \end{aligned}$$

设 ρ 是 G 的一个任意复表示. 因为紧致群的任何表示都是完全可约的, 所以我们可以把 ρ 表示为不可约表示的和, 叫做 ρ 的完全分解, $\rho = \sum_i \varphi_i$, 其中 φ_i 是不可约的. 倘若我们, 把等价的不可约表示写在一起, 即改为 $\rho = \sum_i m_i \varphi_i$, 其中 φ_i 是相异的不可约表示, m_i 是 ρ 的完全分解中含有的与 φ_i 等价的不可约表示的重数. 或者, 我们还可设 ρ 符合 $\rho = \sum_i m_i \varphi_i$, 表示在 ρ 的完全分解中含有与不可约表示 φ_i 等价的 φ_i 的重数, 则 $\rho = \sum_i m_i \varphi_i$, $\varphi_i \neq \varphi_j$, 遍取 G 的所有互不等价的复不可约表示. 当然, 在上式中, 只有有限个 m_i, ρ, φ_i 不等于零. 显然有 $\rho = \rho$. 对于 G 的任何复不可约表示 $\varphi, m(\rho, \varphi) = m(\rho, \varphi)$ 恒成立.

定理 7.2.7

$$1) m(\rho, \varphi) = \int_G \chi_\rho(g) \cdot \overline{\chi_\varphi(g)} dg.$$

2) $\rho = \rho \oplus \chi = \chi$, 也就是说, $\chi \cdot \chi = \chi$ 对 $\forall \chi \in G$ 恒成立.

$$3) \rho \text{ 是不可约的充要条件是 } \int_G |\chi_\rho(g)|^2 dg = 1.$$

证明 显然有 $\chi(g) = \sum_{\varphi} m(\rho, \varphi) \chi_{\varphi}(g)$. 设 φ 是 G 的一个任意给定的复不可约表示, 则

$$\int_G \chi(g) \cdot \overline{\chi_{\varphi}(g)} dg = \sum_{\rho} m(\rho, \varphi) \int_G \chi_{\rho}(g) \cdot \overline{\chi_{\varphi}(g)} dg$$

由和式中的诸积分中, 只有 $\varphi = \rho$ 时不为 0, 其他各项均为零, 所以有

$$\int_G \chi_{\rho}(g) \cdot \overline{\chi_{\rho}(g)} dg = m(\rho, \rho).$$

但由 φ 是 G 的任一复不可约表示, 所以 $m(\rho, \varphi) = \int_G \chi_{\rho}(g) \cdot \overline{\chi_{\varphi}(g)} dg$. 不难算出

$$\int_G \chi_{\rho}(g) \cdot \overline{\chi_{\rho}(g)} dg = \sum_{\varphi} [m(\rho, \varphi)]^2,$$

因此, 复不可约表示 ρ 充要条件是 $\int_G \chi_{\rho}(g) \cdot \overline{\chi_{\rho}(g)} dg = 1$.

§ 7.3 $L_2(G)$ 空间

定义 7.3.1 紧群 G 上的可积函数 f 与 f_1, f_2, \dots 存在, 其中 dg 是由 G 上不变积分决定, n 叫复数, $f_1 = \int_G f_1 dg = 1$, 则称 f 是平方可积的, 简称为 L_2 函数. 两个 L_2 函数 f 与 f_1 称为是等价的, 如果 $f - f_1 = 0$ a.e., 也就是说, f, f_1 的值在 G 上几乎处处相等.

由平方可积 $L_2(G)$ 函数的等价类所构成的向量空间, 以符号 $L_2(G)$ 表之. 我们还以下式定义其上的内积:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_G f_1(g) \overline{f_2(g)} dg.$$

不难验证上式的确实定义了 $L_2(G)$ 上的内积, 这样就赋予 $L_2(G)$ 一个自然的 Hilbert 空间的结构.

令 $IR(G)$ 是 $L_2(G)$ 的由复不可约表示 ρ 的等价类所组成的集合, 也

$$\{\varphi_{\rho}(g), \varphi(g)\} = \{\varphi_{\rho}(g)\}, \quad \varphi \in IR(G)$$

是 $L_2(G)$ 中的一组正交向量, 而且

$$\|\varphi_{\rho}(g)\|_{L_2}^2 = 1/\dim \varphi.$$

且 $\{\varphi_{\rho}(g)\}$ 是 $L_2(G)$ 中由非零实数向量所组成的 $L_2(G)$ 空间的一组基底, 这就是 Peter-Weyl 定理.

$\varphi = \varphi_{\rho}(g), \varphi(g) = \varphi_{\rho}(g), \varphi \in IR(G)$ 组成 Hilbert 空间 $L_2(G)$ 的一组基底.

定义 7.3.2 在 G 上的每个共轭类上取等值的 L -函数,叫做 G 上的中心函数.若以 (G/\bar{Ad}) 表示由 G 的所有共轭类所构成的商空间,并且赋予适当的测度 $d\sigma$,使得

$$\int_{G/\bar{Ad}} f d\sigma = \int_G (f \circ \pi) dg,$$

其中 $\pi: G \rightarrow (G/\bar{Ad})$ 是自然映射, $f: (G/\bar{Ad}) \rightarrow \mathbb{C}$ 或 \mathbb{R} , 则 G 上的所有中心函数所构成的子空间和 $L_2(G/\bar{Ad})$ 同构.换句话说,映射

$$\pi^*: L_2(G/\bar{Ad}) \rightarrow L_2(G) \quad \pi^* f = f \circ \pi$$

是一个由 $L_2(G/\bar{Ad})$ 到上述子空间的同构.

把上面两定理结合起来,即得

定理 7.3.1 $\chi_1, \chi_2 \in IR(G)$ 作成 $L_2(G/\bar{Ad})$ 的一组标准正交基.

定义 7.3.3 设 (G, χ) 和 (G, χ') 是两对正交复(实)表示,则有右群的一个复(实)表示 $(G_1 \times G_2, V_1 \otimes V_2)$ 或 $(G_1 \times G_2, V_1 \otimes_R V_2)$:

$$(g_1, g_2)x_1 \otimes x_2 = g_1 x_1 \otimes g_2 x_2, (g_i \in G_i, x_i \in V_i, i = 1, 2).$$

我们把它叫做 (G, χ) 和 (G, χ') 的外张量积,记符号 $(G, \chi) \otimes (G, \chi')$ 表示之.同样,我们用 $\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_2$ 表示

$$\varphi_1: G_1 \rightarrow GL(V_1) \text{ 和 } \varphi_2: G_2 \rightarrow GL(V_2)$$

的外张量积.

$$\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_2: G_1 \times G_2 \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2).$$

定理 7.3.2 $IR(G_1 \times G_2) = \{ \chi_1 \otimes \chi_2 \mid \chi_i \in IR(G_i) \}$.

证明 先证 $\chi_1 \otimes \chi_2 \in IR(G_1 \times G_2)$. $\chi_i \in IR(G_i)$ 对于任给的 $g_i \in G_i$ 和 $\mu_i \in G_i$ 有成立,我们可以取在 χ_i 下不变的酉阵,对于任意的 $g_i \in G_i$ 和 $\mu_i \in G_i$ 是 V_i 的酉变换,因此,总可以找到在 V_1 和 V_2 中的正交基 e_1, \dots, e_n 和 e'_1, \dots, e'_m , 它们分别都是 $\varphi_1(g_1)$ 和 $\varphi_2(g_2)$ 的特征向量,即:

$$\begin{cases} \varphi_1(g_1)e_k = \lambda_k e_k, & 1 \leq k \leq n; \\ \varphi_2(g_2)e'_l = \mu_l e'_l, & 1 \leq l \leq m. \end{cases}$$

而 $e_k \otimes e'_l$ ($1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m$) 显然构成 $V_1 \otimes V_2$ 中一组正交基,并且由 $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ 的定义

$$\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_2(g_1, g_2)e_k \otimes e'_l = (\lambda_k \cdot \mu_l)e_k \otimes e'_l.$$

所以

$$\chi_1 \otimes \chi_2(g_1, g_2) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \lambda_k \mu_l e_k \otimes e'_l = \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\sum_{l=1}^m \mu_l e'_l \right) = \chi_1(g_1) \cdot \chi_2(g_2).$$

由上式即得

$$\begin{aligned} \int_G |\mu \circ \lambda| \, d\mu &= \int_G |\lambda| \, d\mu = \int_G |\lambda| \, d\mu \\ &= \int_{G_1} |\chi_{\eta_1}(g_1)|^2 dg_1 \cdot \int_{G_2} |\chi_{\eta_2}(g_2)|^2 dg_2 = 1. \end{aligned}$$

这也就证明, $\varphi \in \mathcal{F}$, $\psi \in IR(G)$ 是 (G, G) 的复不可约表示. 由引 4.1 设 ψ, ψ 也分别是 $IR(G_1)$ 和 $IR(G_2)$ 中的元素, 则有

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\eta_1 \otimes \eta_2}, \chi_{\theta_1 \otimes \theta_2} \rangle &= \int_{G \times G_2} \chi_{\eta_1 \otimes \eta_2} \cdot \overline{\chi_{\theta_1 \otimes \theta_2}} dg_1 dg_2 \\ &= \int_{G_1 \times G_2} \chi_{\eta_1}(g_1) \cdot \chi_{\eta_2}(g_2) \cdot \overline{\chi_{\theta_1}(g_1)} \cdot \overline{\chi_{\theta_2}(g_2)} dg_1 dg_2 \\ &= \int_{G_1} \chi_{\eta_1}(g_1) \overline{\chi_{\theta_1}(g_1)} dg_1 \cdot \int_{G_2} \chi_{\eta_2}(g_2) \overline{\chi_{\theta_2}(g_2)} dg_2 \\ &= \langle \chi_{\eta_1}, \chi_{\theta_1} \rangle \cdot \langle \chi_{\eta_2}, \chi_{\theta_2} \rangle, \end{aligned}$$

所以 $\{\chi_{\eta_1 \otimes \eta_2} | \eta_1 \in IR(G_1), \eta_2 \in IR(G_2)\}$ 构成了

$$L_2(G_1/\bar{A}d \times G_2/\bar{A}d) \cong L_2(G_1 \times G_2/\bar{A}d)$$

的一组正交基. 这也就证明, 上述集合 \mathcal{F} 已构成 $IR(G \times G)$ 的全体, 亦即 $(G \times G)$ 的任何复不可约表示都能表为 $\eta_1 \otimes \eta_2$ 形式.

群的运算自然地给定了 $(G \times G)$ 在 $(G \times G)$ 本身上的左、右平移变换, 即下述变换

$$(g, g_2) \rightarrow (g_1, g_2), \quad (g, g_2) \rightarrow (g, g_1).$$

这个变换诱导出下述 $G \times G$ 在 $L_2(G)$ 上的变换:

$$(G \times G) \times L_2(G) \rightarrow L_2(G); [(g_1, g_2)f](x) = f(g_1^{-1}xg_2).$$

显然, 上述变换决定了 $(G \times G)$ 在 $L_2(G)$ 上的 $L_2(G)$ 上的一族线性表示, 不难证明, 对于任何 $\varphi \in IR(G)$, $\mu = \text{dim} \varphi$ 个表示函数 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 所张成的子空间是 $(G \times G)$ 不变的, 而且 L 在其上的作用等价于 $\varphi^{-1} \otimes \varphi$, 其中 φ^{-1} 是 φ 的对偶表示. 事实上, 设 φ 对于基 e_1, \dots, e_n 的表示函数为 $\varphi_j(g)$ ($1 \leq j \leq n$), 按定义

$$[(g_1, g_2)\varphi_j](g) = \varphi_j(g_1^{-1}gg_2).$$

另一方面, 由 $\varphi(g_1^{-1}gg_2) = \varphi(g_1^{-1})\varphi(g)\varphi(g_2)$ 可知,

$$\varphi_j(g_1^{-1}gg_2) = \sum_i \varphi_i(g_1^{-1}) \varphi_i(g) \varphi_i(g_2) = \sum_i \varphi_i(g_1^{-1}) \varphi_i(g) \varphi_i(g_2).$$

因此,

$$[(g_1, g_2)\varphi_j](g) = \sum_{i, l} \varphi_{il}(g_1^{-1}) \varphi_j(g_2) \varphi_{il}(g).$$

上式说明由 φ_j 所张成的子空间是 $(G \times G)$ 不变的. 为证明它与 $\varphi^{-1} \otimes \varphi$ 等价, 可自

接计算 $\varphi^* \tilde{\otimes} \varphi$ 由定义

$$\begin{aligned}\varphi^* \tilde{\otimes} \varphi(g_1, g_2)(e_i^* \otimes e_j) &= \varphi^*(g_1)e_i^* \otimes \varphi(g_2)e_j \\ &= \sum_k \varphi_k(g_1^{-1})e_k^* \otimes \sum_l \varphi_l(g_2)e_l \\ &= \sum_{k,l} \varphi_k(g_1^{-1}) \cdot \varphi_l(g_2)e_k^* \otimes e_l.\end{aligned}$$

由于 $\varphi(e)$ 是此子空间的基, 而 e_i 是 V 的基, 比较上面两式, 上述等价性是明显的.

总结本节的讨论, 即有

$$L_2(G) \cong \bigoplus \sum V(\varphi^*) \otimes V(\varphi),$$

其中 G 在 $V(\varphi^*) \otimes V(\varphi)$ 上的作用是 $\varphi^* \tilde{\otimes} \varphi$.

现在让我们举几个实例, 来看看前面理论的一些初步用法.

1. Abel 群

设 G 为一个紧致可换群, φ 是 G 的一个复不可约表示, 则不难用 Schur 引理的特殊形式证明 $\dim \varphi = 1$.

事实上, 因为 G 是可换的, 我们可以取 $\lambda = \varphi(g)$, 其中 g 是 G 中任意给定的元素. 则有

$$\varphi(g) \cdot \varphi(g_0) = \varphi(g_0 \cdot g) = \varphi(g_0) \cdot \varphi(g)$$

对所有 $g \in G$ 都成立. 所以由引理可知, 存在一个适当的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使得 $\varphi(g) = \lambda \cdot I$, 其中 I 是表示空间上的恒等变换. 换句话说,

$$\varphi(G) = \{\varphi(g_0) | g_0 \in G\} \subset \{\lambda I | \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

另一方面, 显然有, 表示空间 V 的任何子空间都是 $\lambda I | \lambda \in \mathbb{C}$ 的不变子空间, 当然也是它的部分. 所以 V 是 $\varphi(G)$ 的不变子空间. 但是, 假设 V 为复不可约的, 所以 V 除了 $\{0\}$ 和本身之外, 不能再有其他的子空间了. 这种情形只有一种可能, 就是 $\dim \varphi = \dim V = 1$.

$$2. G = S^1 = \{e^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

S^1 是一个紧致可换群, 由 1, 它的任何复不可约表示 φ 都是一维的, 即

$$\varphi: S^1 \rightarrow \mathbb{C}^1, \quad e^{i\theta} \mapsto \lambda e^{i\theta}.$$

令

$$\varphi_1: S^1 \rightarrow S^1, \varphi_2(e^{i\theta}) = e^{i\theta},$$

其中 q 是 ∞ 取定的整数. 容易看出, φ 是 π 的一个同胚映射.

另一方面, 设 $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ 是任意的一个同胚映射, 则不难证明, φ 必然与上述 φ_0 等价.

在数学分析中, 我们熟知, $\{e^{in\theta} | n \in \mathbb{Z}\}$ 构成了 $L^2(S^1)$ 的一组正交基. 这也就是 Peter-Weyl 定理在 $G = S^1$ 下的形式. 而 Peter-Weyl 定理其实就是上述傅氏级数的基本事实紧群范围中的深刻推广.

3. $G = S^3 =$ 么模四元数集合

我们先把四元数体表示成一个二维复空间, 即:

$$Q = \{X = z_1 + jz_2 | z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^2.$$

对 S^3 中的任一元素就可写成 $q = a + jb$, 其中 $a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1$. 对于这样一个给定的 q , 就对应有一个 $Q \subset \mathbb{C}^2$ 上的线性变换 $X \mapsto qX$, 其矩阵为 $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, 或者

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 - \bar{b}z_2 \\ bz_1 + \bar{a}z_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{上述线性变换: } \begin{cases} z_1 \mapsto az_1 - \bar{b}z_2, \\ z_2 \mapsto bz_1 + \bar{a}z_2 \end{cases}$$

就给出 S^3 中由 z_1, z_2 的 k 次齐次多项式所构成的线性子空间的一个线性表示, 其定义如下: 设 f 是 z_1, z_2 的 k 次齐次多项式, 规定

$$(q \circ f)(z_1, z_2) = f(az_1 - \bar{b}z_2, bz_1 + \bar{a}z_2), \quad q = a + jb.$$

我们将以 φ_k 记这个复表示, 它的维数是 $k+1$.

定理 7.3.3 对于任给的 $k = 1, 2, \dots$, 上述 S^3 的复线性表示都是不可约的, 而且 $IR(S^3) = \{\varphi_k | k = 0, 1, 2, \dots\}$.

证明 现在让我们把 Q 想成一个四维实向量空间. 这样, 对于 S^3 中的任一元素 q , 就得到 R^4 的一个变换 $X \mapsto qXq^{-1}$, 它是 R^4 上保持实数轴不动的一个正交变换, 称之为共轭变换或伴随变换. 如, i 和 j 的伴随变换可以看成是 $\pi/2$ 度绕实数轴不动的 S^1 旋转. 对此, S^3 中包含 i 的那个共轭类就是一个由垂直于 i 轴的二维平面 S^2 所截出来的二维球面 S^2 , 其半径为 $\sin \theta$, 其面积为 $4\pi \sin^2 \theta$ (图 7.3.3). 以 χ_k 表示 φ_k 在 S^2 上取等值, 即

$$\chi_k(ge^{\theta}g^{-1}) = \chi_k(e^{\theta}).$$

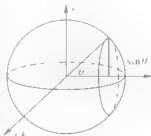


图 7.3.3

所以有

$$\begin{aligned}\int_G \chi_k \overline{\chi_l} dg &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3(1)} \chi_k \overline{\chi_l} d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \chi_k(e^{i\theta}) \overline{\chi_l(e^{i\theta})} (4\pi \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_k(e^{i\theta}) \overline{\chi_l(e^{i\theta})} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) (\overline{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\chi_k(e^{i\theta}) \cdot (e^{i\theta} - e^{-i\theta})|^2 d\theta.\end{aligned}$$

再者,由 φ_k 的定义,以及由 $e \mapsto e^{-1}$ 所决定的线性变换是

$$z_1 \mapsto e^{i\theta} z_1, z_2 \mapsto e^{-i\theta} z_2,$$

因此不难看出,单项式 $z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k, \dots$ 都是 φ_k 的特征向量,而且相应的特征值分别是 $e^{ik\theta}, e^{i(k-2)\theta}, \dots, e^{i(k-2j)\theta}, e^{-ik\theta}$. 所以

$$\chi_k(e^{i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = (e^{i(k+1)\theta} + e^{i(k-1)\theta} + \dots + e^{-i(k-1)\theta} + e^{-i(k+1)\theta}) \times (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

将下式代入上式,便得出

$$\int_G |\chi_k|^2 dg = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |e^{i(k+1)\theta} - e^{-i(k+1)\theta}|^2 d\theta = 1.$$

这也就证明了 φ_k 是复不可约的,再因为

$$\{\chi_k(e^{i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = (e^{i(k+1)\theta} - e^{-i(k+1)\theta}), k = 0, 1, 2, \dots\}$$

已构成 $L(S^3)$ 上的奇函数子空间的正交基底,而且 $\chi_k(e^{i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta}), k = 0, 1, 2, \dots$ 已构成 $L(S^3)$ 上的偶函数子空间的正交基底. 又由于每两个正交交 S^3 上的点 $e^{i\theta_1}$ 与 $e^{i\theta_2}$ 对应两个点,即 $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ 或 $e^{i\theta_1} = -e^{i\theta_2}$, 所以 $L(S^3)$ 上的偶函数恰是 G/H 上的所有函数,因此 $\chi_k(e^{i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta}), k = 0, 1, 2, \dots$ 构成 $L(G/H)$ 的正交基底,且 $L(H) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1, 2, \dots\}$.

问题 7.3

1. 设 $\varphi: G \rightarrow GL(V)$, $\psi: G \rightarrow GL(W)$ 分别是 G 到 V 和 W 的表示, 规定

$$\varphi \otimes \psi: G \rightarrow GL(L(V) \otimes L(W)) \text{ 为 } \varphi(g) \otimes \psi(g), g \in G, \text{ 且 } L(V) \otimes L(W) \cong L(V \otimes W).$$

利用 $L(V_1 \otimes V_2) \cong V_1 \otimes V_2$, 证明 $\varphi \otimes \psi \cong \varphi \otimes \psi$.

2. 求证: $\chi_{\varphi \otimes \psi} = \chi_\varphi \cdot \chi_\psi, \chi_{\varphi \otimes \psi} = \chi_\varphi \cdot \chi_\psi$.

3. 设 $\varphi: S \rightarrow S$ 是一个同态映射, 求证: 自然映射 φ 与 ψ 等价, 其中 $\varphi: S \rightarrow S$ 定义为 $\varphi(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. 设 G 是一个有限群, 证明:

$$(1) \dim L_2(G) = \text{ord}(G); (2) \dim L_2(G/\bar{A}d) = \text{cl}(G).$$

§ 7.4 Lie群与Lie代数

定义 7.4.1 设 G 是一个非空集合, 满足

1) G 是一个群;

2) G 也是一个微分流形;

3) 群的运算是可微的, 即由 $G \times G$ 到 G 的映射 $(g, h) \rightarrow gh$ 是可微映射, 则称 G 是一个 Lie 群.

既然 Lie 群的结构同时含有群和微分流形的特性, 我们就可以用群的可微性把群的结构线性化, 这也就是 $\text{Lie}(G)$ 称之为“无穷小群”, 而我们现在改称之为“Lie 代数”. 看第一节中, 我们将单参数子群的微分表示线性化, 确定 Lie 代数所应有的结构, 然后在第一节中将它与紧密联系 Lie 群与 Lie 代数的基本定理, 说明 Lie 代数乃是 Lie 群结构的局部完全不变量.

定义 7.4.2 一个 Lie 群 G 的单参数子群就是一个由实数加法群 R 作为 G 的一个子群) 到 G 中的可微同态 $\varphi: R \rightarrow G$.

我们若以 t 表示 R 中元素的参数, $t_1, t_2 \in R$ 就是 G 中满足条件 $\varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2)$ 的一条可微参数曲线.

我们将以 \dot{g} 表示表示 G 中单参数子群在单位元素 e 处的切向量, 设 $\dot{g}: R \rightarrow G$ 是一个 G 中的单参数子群, 则它在 e 点的速度向量, 亦即 $\dot{g}|_{t=0}$, 就是 R 中的一个向量.

命题 7.4.1 对于任何向量 $X \in \mathfrak{g}$, 是存在一个单参数子群 $\varphi: R \rightarrow G$, 使得 X 恰为具有 e 点的速度向量. 再者, 一个单参数子群是充分与具有 e 点的速度向量所唯一确定?

证 设 $\varphi: R \rightarrow G$ 为一个关于单参数子群, 所以, 以 t 可, 在群 G 中的左平移得到变换映射 $X \mapsto X_t: (g, t, X) \mapsto g \cdot \varphi(t, X)$, 它是关于 t 的一个单参数可微变换群, 通常叫做流动变换. 再者, 群的结构也就是说任何左平移 $(g \mapsto (g, X) \cdot g^{-1} = Xg)$, $g \in G$ 或 $(g, X) \mapsto (g, X)$ 和任何左平移 $(X \mapsto (g, X) \cdot g^{-1} = Xg)$ 都是可换的, 所以上述可微变换群的作用与任何左平移是可换的, 亦即 $X \cdot \varphi(t) = (\varphi(t) \cdot X)\varphi(t)$, 因此又称之为左不变但参可微变换群, 或左不变流动.

2) 设 $\varphi: R \rightarrow G$ 是一个左不变流动, 则有 $\varphi_* X = X \circ \varphi(t)$, 于是它在 G 上各点的速度向量就构成 G 上的一个左不变向量场 X , 亦即 $X = d/dt(X_t)$, 其中 X_t 和 λ_t 分别表示向量场 X 在 ag 点和 g 点的向量.

3) 设 X 是一个左不变向量场, 则 X 由它在单位点的值 X_e 所唯一确定, 这是因为 X

从群的观点来看, g 的向量空间结构反映了 Lie 群 G 的乘法运算的一阶逼近, 也就是说, 可以证明: 当 s, t 都是一阶无穷小时,

$$\operatorname{Exp}(sX) \cdot \operatorname{Exp}(tY) = \operatorname{Exp}(sX + tY)$$

在略去高于二阶的无穷小后成立.

如果取 e 是左不变向量场的身份, 我们还可以在 e 上定义一个双线性的运算, 如下:

令 f, g, h 是定义在 G 上的任意的可微函数, X, Y 是任意两个向量场, 定义 $Xf: G \rightarrow R, Xf(x) = X_x f$, 其中 $X_x f$ 表示函数 f 在 x 点对于切向量 X_x 的方向导数. 不难验证: 上述运算满足下列“求导”性质:

$$X(f_1 \cdot f_2) = (Xf_1) \cdot f_2 + f_1(Xf_2).$$

反之, 任何满足上述性质的运算 D 一定是关于某一个向量场的上述“求导”运算, 即: 设 D 为任何对 G 上所有的可微函数 f 都有定义的运算, 并且具有上述可表示的性质, 则必存在唯一的一个向量场 X , 使得 $Df = Xf$ 对所有的 f 都成立.

令 $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$, 则有

$$\begin{aligned} [X, Y](f_1 \cdot f_2) &= X((Yf_1) \cdot f_2 + f_1(Yf_2)) - Y((Xf_1) \cdot f_2 + f_1(Xf_2)) \\ &= ([X, Y]f_1)f_2 + f_1([X, Y]f_2). \end{aligned}$$

上式说明 $[X, Y]$ 也是一个向量场, 它由 X 和 Y 唯一确定, 当 X, Y 都是左不变时, 不难验证 $[X, Y]$ 也是左不变的, 这样就赋予 e 一个运算

$$[,]: g \times g \rightarrow g,$$

称之为“括积”. “括积”具有下列性质:

(i) 双线性:

$$[\lambda X_1 + \lambda_2 X_2, Y] = \lambda_1 [X_1, Y] + \lambda_2 [X_2, Y],$$

$$[X, \mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2] = \mu_1 [X, Y_1] + \mu_2 [X, Y_2].$$

(ii) 斜对称性: $[X, Y] = -[Y, X]$.

(iii) Jacobi 恒等式:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

性质 (i) 和 (ii) 可以由定义推出, 性质 (iii) 则是上式和结合律的推论.

从群的观点来看, 括积就是 Lie 群 G 的“不可交换性”的线性化. 而上述 (i)~(iii) 恒等式则是群的运算之结合律的线性化形式.

用无穷小的术语来说, 就是当 s, t 都是一阶无穷小时,

$$\operatorname{Exp}(sX)\operatorname{Exp}(tY) \cdot \operatorname{Exp}(-sX)\operatorname{Exp}(-tY) = \operatorname{Exp}(s[X, Y])$$

在略去高于二阶的高级无穷小后成立. 换言之, $[X, Y]$ 就是度量 $\operatorname{Exp}(sX)$ 和 $\operatorname{Exp}(-tY)$ 之间不可交换性的主导项, 它是一个二阶的量.

$$\det: GL(V) \rightarrow C^*(R^+)$$

是 $GL(V)$ 到非零复(实)数的乘法群 $(\cdot, 1)$ 的同态, 所以

$$sl(V) = \{A \in GL(V); \det(A) = 1\}$$

构成 $GL(V)$ 的一个正规子群. 所以, 我们尚须, 在这种情形下, $sl(V)$ 本身也是一个 Lie 群, 称之为 V 上的特殊线性群. 由上述命题不难看出 $sl(V)$ 的 Lie 代数 \mathfrak{g} 应该是

$$SL(V) = \{A \in gl(V) = \mathcal{L}(V, V); \text{Tr} A = 0\}.$$

定理 7.4.3 对于任意的 $V = \mathcal{L}(V, V)$, 总有 $sl(V) = \mathfrak{g}$.

证明 因为 V 是实(复)量空间的全体, 所以 V 与复化(实)复向量空间的情形来讨论, 我们不妨假设 V 是复向量空间, 设 A 为 V 上的线性变换, 众所周知的事实是在 V 中必存在一组基底 e_1, \dots, e_n , 使得 A 的相矩阵 A^k 在 V 上的角矩阵 A^k 亦即子空间 $\text{span}\{e_1, \dots, e_i\} (i = 1, \dots, n)$ 都是在 A 的作用之下不变的,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

因此,

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & * \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

用上述 $A^k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 的矩阵形式, 就可以算得

$$\det(\text{Exp} A) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & e^{\lambda_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \prod e^{\lambda_i} = \exp \left\{ \sum \lambda_i \right\} = e^{\text{Tr} A}.$$

例 7.4.3 我们将以 $GL(n, C)$ 表示和以 $GL(n, R)$ 表示复(实)方阵所组成的群, 以 $GL(n, R)$ 表示以 $\det = 1$ 的 n 阶实方阵所组成的群. 由上述命题可知, $GL(n, C)$ 就有一个群的同构关系

$$GL(V) \simeq \begin{cases} GL(n, C), & V \text{ 是 } n \text{ 维复空间;} \\ GL(n, R), & V \text{ 是 } n \text{ 维实空间.} \end{cases}$$

$GL(n, C)$ 和 $GL(n, R)$ 的流形结构都是容易算, 微分是平凡的. 因此, 严格地说 $GL(V)$ 上的流形结构是从 $GL(n, C)$ 或 $GL(n, R)$ 上构造“同构”搬过来的.

定义 7.4.4 Lie 群 G 和 G' 称为是同构的, 若存在映射 $\varphi: G \rightarrow G'$ 使得

1) φ 是群 G 到 G' 上的同构映射;

2) φ 是流形 G 到 G' 上的微分映射 (differential mapping), 映射 φ 叫做 (在 G' 中的 Lie 群的) 同构映射.

由此定义可知, 上面的同构是 Lie 群的同构.

定义 7.4.5 设 \mathfrak{g} 和 \mathfrak{g}' 分别是 Lie 群 G 和 G' 的 Lie 代数, 若存在一个映射 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$, 满足下列条件:

1) ρ 是向量空间 \mathfrak{g} 到 \mathfrak{g}' 上的同构映射;

2) $[\rho X, \rho Y] = \rho[X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{g}$,

则称映射 ρ 是同构的, 叫做 Lie 代数 \mathfrak{g} 到 \mathfrak{g}' 上的同构映射. n 阶实矩阵代数 $GL(n, \mathbb{R})$ 和 $GL(n, \mathbb{C})$ 的 Lie 代数分别是 $M(n, \mathbb{R})$ 和 $M(n, \mathbb{C})$, $M(n, \mathbb{C})$ 和 $M(n, \mathbb{R})$ 分别是 n 阶复数与实数全体构成的集合. 它们显然有 Lie 代数同构关系:

$$gl(V) \cong \mathcal{L}(V, V) \cong \begin{cases} M(n, \mathbb{C}); \\ M(n, \mathbb{R}). \end{cases}$$

例 7.4.4 我们以 $SL(n, \mathbb{C})$ 和 $SL(n, \mathbb{R})$ 分别表示由行列式为 1 的复数与实数 n 阶方阵组成的群, 叫做特殊线性群. $SL(n, \mathbb{C})$ 和 $SL(n, \mathbb{R})$ 分别表示它们 Lie 代数. 不难验证, $SL(n, \mathbb{C})$ 和 $SL(n, \mathbb{R})$ 分别对应复数与实数 n 阶方阵代数, 且有同构关系:

$$SL(n, \mathbb{C}) \cong SL(n, \mathbb{R}), \quad \text{且} \quad \dim SL(n, \mathbb{C}) = \dim SL(n, \mathbb{R}).$$

由例 7.4.3 和例 7.4.4, 我们对应地构造 $gl(V) \cong \mathcal{L}(V, V)$ 或 $GL(n, \mathbb{R})$ 及其 Lie 代数 $gl(V)$ 和 $SL(n, \mathbb{R})$ 及 $SL(n, \mathbb{C})$. 故 $SL(n, \mathbb{R})$ 已不是 Lie 群.

例 7.4.5 设 V 是一个 m 维复向量空间, $\langle x, y \rangle$ 是定义在 V 上的非退化双线性型. 若对任何 $x, y \in V$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ 和 $\langle x, x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 成立, 则称之为对称或斜对称的.

设 $\langle x, y \rangle$ 是 V 上的非退化对称或斜对称的非退化双线性型, 容易验证 $GL(V)$ 中存在一个不变的元素, 亦即 $\langle x, y \rangle$ 对任何 $x, y \in V$ 恒成立, 组成一个闭子群, 因此它本身也是一个 Lie 群.

由于 $\langle x, y \rangle$ 是对称的时, 这个子群称为复正交群, 记为 $O(V)$. 类似地, 例 7.4.4 的结论, 我们已可以讨论相应的实正交群. 由线性代数知识可知, V 上存在一组基 e_1, \dots, e_m , 使得 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = 1$ 或 -1 , m 称为复标准正交基. 任取 $g \in O(V)$, g 在基 e_i 下的矩阵仍记为 g , 则容易验证:

$$g \in O(V) \Leftrightarrow g^T = g = g^* g^T = I_m \quad (g^T \text{ 表示 } g \text{ 的转置}).$$

满足上式的复矩阵称为复正交阵. 我们, 把 $GL(m, \mathbb{C})$ 中所有复正交矩阵组成的子群记为 $O(m, \mathbb{C})$, 则 $O(V) \cong O(m, \mathbb{C})$.

现在我们来讨论复正交群的 Lie 代数, 记之为 $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$.

任取 $X \in \mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$, 有 $\text{Exp}_t X \in \text{O}(n, \mathbb{C}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. 因此对于任何 $u, v \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle \text{Exp}_t X \cdot u, \text{Exp}_t X \cdot v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

对 t 式两边分别在 $t=0$ 处求导, 我们得到 $\langle X u, v \rangle = -\langle u, X v \rangle$.

此式表明, X 在标准正交基下的矩阵仍记为 X , 是一个斜对称复数, 反过来也是对的. 因此, $X \in \mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) \Leftrightarrow X$ 是斜对称的.

如果我们以上述标准正交基为基来构造复数域上的向量空间 V , 则 V 是一个实线性空间. (\mathfrak{g}, V) 中 \mathfrak{g} 是一个不变的元素全体组成 (\mathfrak{g}, m, R) 的一个子群, 称为复正交群, 简称为正交群, 记为 $O(m)$.

不难证明它是一个紧 Lie 群, 且有

$$g \in O(m) \Leftrightarrow g^T \cdot g = g \cdot g^T = I_m, \quad g \in GL(m, \mathbb{R})$$

若 \mathfrak{g} 是一个斜对称式, 由 (\mathfrak{g}, V) 中 \mathfrak{g} 是一个不变的元素组成的子群叫做复辛群, 记为 $Sp(V)$. 由线性代数知识可知, $\dim V = 2n$ 为偶数. 设 $m = 2n$, 则在 V 上存在一组基 e_1, \dots, e_n , 满足

$$\langle e_i, e_{n+i} \rangle = -\langle e_{n+i}, e_i \rangle = 1 \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \langle e_{n+i}, e_{n+j} \rangle = 0. \quad \text{若 } k, l \text{ 不满足上述条件}$$

如果我们仍把 (\mathfrak{g}, V) 中元素 k 在一组基下的矩阵记为 K , 则不难验证

$$K \in Sp(V) \Leftrightarrow K^T J K = J, \quad J =$$

其中

$$J_n = \begin{bmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{bmatrix}.$$

令 $Sp(n, \mathbb{C}) = \{K \in Sp(V) \mid K^T J K = J, \det K = 1\}$, 则 $Sp(V) = Sp(n, \mathbb{C})$ 与 $Sp(n, \mathbb{R})$ 是等价的. 自然同构, 今后对这两子群也不加区别, 仍称为复辛群.

现在讨论复辛群的 Lie 代数 $Sp(n, \mathbb{C})$, 任取 $X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, 令 $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \quad X_i \in \mathbb{R}$. 注意到 $\text{tr} X = 0$, $\text{tr} X_1 = \text{tr} X_4 = 0$ 及 $\text{tr} X_2 = -\text{tr} X_3$, 因此有

$$X \cdot J = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 & X_1 \\ X_4 & X_3 \end{bmatrix} = -J \cdot X, \quad \text{或者 } J \cdot X = -X \cdot J.$$

即 $\text{Exp}_t X = X \cdot J = -J \cdot X$. 所以, 我们得知 $X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \Leftrightarrow X \cdot J = -J \cdot X$.

将 X 写成分块形式:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix},$$

则条件 $X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \Leftrightarrow X^T J_n + J_n X^T = 0$ 等价于

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = X_1^T, X_3 = X_4^T, \\ X_1^T + X_4 = 0. \end{cases}$$

所以

$$\rho(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_3 & X_1^T & 0 \end{pmatrix}^T, \quad X_2, X_3 \text{ 是对称的}$$

例 7.4.6 设 V 是一个 n 维酉空间, ρ 是其上定义的实定 Hermite 型, 也称为酉积, 则 (V, ρ) 中所有 ρ 不变的元素全体构成一个闭子群, 称为酉群, 记为 $U(n)$. 容易看出, $U(n)$ 也是一个紧群.

现在讨论 ρ 之相应的复矩阵群. 众所周知, 在 V 中存在标准正交基, 或称为酉基 e_1, \dots, e_n , 我们也将 ρ 在 (V, ρ) 中与此基上酉基 e_j, e_k 对应记为 ρ_{jk} 表示, 则容易验证

$$g \in U(n) \Leftrightarrow g^T \cdot g = g \cdot g^T = I_n.$$

换句话说, $U(n)$ 与 n 阶实正交群 $O(n)$ 同构. 因此, 所有 n 阶酉矩阵组成的 Lie 群与 $U(n)$ 同构, 今后也不加区别, 通记为 $U(n)$.

这些 Lie 群, 在 Lie 群理论中占有非常重要的地位, 它们是 Lie 群的典型实例, 应用十分广泛, 一般统称为典型群.

我们指出, Lie 代数本身也是 Lie 群在 Lie 群上应用数学理模型. 我们可以从 Lie 群, 给出下列抽象 Lie 代数的定义.

定义 7.4.6 设 V 是 \mathbb{R} 上复向量空间, 在 V 上定义一种新的运算 $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$, 称之为方括号, 满足 (7.4.1) 中条件 (1)~(3), 构成这样一个代数体系, 我们称之为实复数域上的 (抽象) Lie 代数.

由上述可知, 本章所研究一般域上的 Lie 代数 (抽象 Lie 代数) 的研究是近世代数中一个蓬勃发展的领域, 而且也和许多其他数学分支相关.

§ 7.5 Lie 群的对称性

在这一节中, 我们将对单参数子群, 特别是常微分方程组解的存在唯一性定理来描述 Lie 群结构的线性化, 从而对于 G 的 Lie 群 G , 构造了它的 Lie 代数 \mathfrak{g} , 它是一种具有 (7.4.1) 中条件 (1)~(3) 的括号运算的线性空间.

设 $\phi: G \rightarrow G$ 是一个由 G 到 G 的映射, 我们记 ϕ 相对 \mathfrak{g} 的 Lie 代数 \mathfrak{g} 的 Lie 代数, 眼下我们可以采用下列定义来参数化子群在 Lie 群 G 中对于任意 $X \in \mathfrak{g}$, $\phi_X: \mathbb{R} \rightarrow G$ 是 G 相应的单参数子群, 则显然

$$\phi_X(0) = E, \quad \phi_X'(0) = X,$$

是 G 中的一个单参数子群, 所以必存在 $\phi_X: \mathbb{R} \rightarrow G$, 使得

$$(\phi \circ \phi_X)(t) = \phi_{\phi_X(t)}(t).$$

改用指数映射的符号来写就是: 存在一个由 \mathfrak{g} 诱导出来的 Lie 代数同态 (即保持括

存在着一个唯一的相应于 χ 的极大积分子流形, 通过单位元素 e , 以表之

现在证明 H 是一个连通子群. 设 h 是 H 中的任意元素. 因为 χ 是 χ 不变的, 所以 $e \cdot h \cdot H = h \cdot e \cdot H$ 当然也是 χ 的一个极大积分子流形. 由定义, $e \in h \cdot e \cdot H$, 即 $h \cdot e \cdot H$ 也是过 e 点的, 由极大积分子流形的唯一性即得 $h \cdot H = H$. 但是 h 是任意的, 所以 $H = H \cdot H = \cdots = H$. 这也就证明了 H 是一个连通子群.

推论 7.5.2 设 G_1 是一个单连通 Lie 群, G_2 是一个连通 Lie 群, α, β 分别是 G_1 和 G_2 的 Lie 代数, 则对于任给的 Lie 代数同态 $f: \alpha \rightarrow \beta$, 存在一个唯一的 Lie 群同态 $F: G_1 \rightarrow G_2$, 使得如图 7.9 所示图解可换.

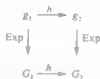


图 7.9

证明 要把上述关于同态的问题归为已解答了子群的情形, 常用的手法是把“映射”转换为它的映像 \exp . 且具体做法如下: 令

$$\Gamma(\tilde{h}) = \{X_1, \tilde{h}(X_1), X_1 \in g_1\} \subset g_1 \times g_2,$$

且 $\Gamma(\tilde{h})$ 是 $g_1 \times g_2$ 的 Lie 子代数. 而 $g_1 \times g_2$ 显然就是 $G_1 \times G_2$ 的 Lie 代数, 所以由基本定理可知, 在 $G_1 \times G_2$ 中存在一个唯一的连通 Lie 子群 Γ , 使得如图 7.10 所示图解可换.

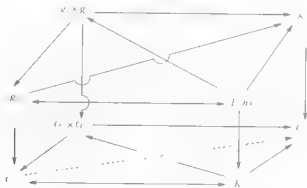


图 7.10

在上述图解中, 所有垂直向下的映射都是 \exp . 再者, 因为 $\Gamma(\tilde{h}) \rightarrow g_2$ 是一个 Lie 代

数的同构, 所以任给映射 $\theta: G \rightarrow G'$ 是一个覆盖同态, G 是单连通的, 因此这个由 θ 引入的 G' 的同态也是同构, 它由映射 θ 引入的是由 G 引入的同构. 把它与 K 到 G' 的映射 θ 结合起来, 便得到由 K 到 G' 的映射 $\theta \circ \theta^{-1}$, 它与 K 到 G 的映射 θ 交换是显然的.

利用基本定理, 我们还可以证明下列重要定理.

定理 7.5.3 设 G 是 n 维 Lie 群, H 是 G 的一个 Lie 子群. 假设 H 是 G 的一个闭子集, 且在 H 上存在一个 Lie 代数, 使得 H 是 G 的一个拓扑 Lie 子群.

证明 设 \mathfrak{g} 是 G 的 Lie 代数, 令 $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}, \exp tX \in H, \text{ 对所有 } t \in \mathbb{R}\}$.

由 \mathfrak{h} 是 \mathfrak{g} 的一个 Lie 代数, 这又利用到性质 1 和基本定理, G 中有一个连通子群 H' , 它的 Lie 代数是 \mathfrak{h} . 然 $H' = H$ 或 $H' \cap H = \{e\}$. 若 $H' \cap H = \{e\}$, 则 H' 取 G 的相对拓扑, 且记 H' 为 H_0 . 在 H_0 上定义 H' 与 H 的拓扑, $H' = H_0$ 或 $H' = H$. 故证.

对任意的 $e \in G$, H_0 都存在唯一的单连通覆盖群 $\tilde{G} \rightarrow G$. 这覆盖同态的核是 G 上的一个最小正规子群, 它必定包含在 H_0 之中.

$\tilde{G} \rightarrow G$ 是双叶群, 且由抽象 Lie 代数 \mathfrak{g} 与 \mathfrak{h} 是 $\text{Lie}(\text{Lie}(G))$ 的一个适当的 Lie 子代数同构. 由此可知同态 $\tilde{G} \rightarrow G$ 代数都是 \mathfrak{h} 的 Lie 子群.

推论 7.5.4 所有有限维 Lie 代数及其同态和所有单连通 Lie 群及其同态之间的一一对应的.

最后我们举两个有关覆盖同态的例子.

例 7.5.1 $(\mathbb{R}, +)$ 和 $(\mathbb{N}, +)$ 都是一维可交换连通群. 它们的 Lie 代数显然是同构的. 存在由 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ 的覆盖同态, 故 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ 是 \mathbb{Z} . 但是 \mathbb{N} 到 \mathbb{R} 的唯一同态是平凡的. 元素都被映射到零. 这一现象的基本原因是 \mathbb{R} 是单连通的, 但 \mathbb{N} 却不是单连通的.

例 7.5.2 我们已知 \mathbb{N} 的伴随表, 就是 $\mathbb{N} \rightarrow \text{SO}(2) \rightarrow \text{SO}(3) \rightarrow 1$, 即把 $t \in \mathbb{N}$ 映射到 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$. 在 \mathbb{R} 上拓扑直积 \mathbb{R} 上诱导的不变变换, 这也就是 $\mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(2) \rightarrow \text{SO}(3) \rightarrow 1$ 的覆盖群. 所以 \mathbb{R} 是 \mathbb{N} 的 Lie 代数是同构的. 但是不存在 $\text{SO}(3)$ 到 \mathbb{N} 的映射. 这一现象的基本原因是 \mathbb{N} 不是单连通的, 而 $\text{SO}(3)$ 是 \mathbb{Z} .

问题 7.5

设 $H \subset G$ 是 G 的一个 Lie 子群, \mathfrak{g} 和 \mathfrak{h} 分别是 G 和 H 的 Lie 代数, 求证 \mathfrak{g} 是 \mathfrak{h} 的 Lie 子代数.

提示: 注意代数映射, 且 \mathfrak{g} 是 \mathfrak{h} 的一个子代数. 每个 $X \in \mathfrak{h}$ 都有一个单位元 e 点的邻域, 它不包含任何不等于 e 的子群.

3. 证明由 $\text{SO}(3)$ 到 S^3 的同态是平凡的.

4. 设 G 是 $GL(4, \mathbb{R})$ 中下列元素组成的 Lie 子群:

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & \alpha \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}),$$

求它的 Lie 代数 $\eta \subset \mathfrak{g}^1(4, \mathbb{R})$.

5. 在矩阵群中, 还有几种十分重要的群,

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}),$$

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}),$$

$$Sp(n) = Sp(n, \mathbb{C}) \cap U(2n).$$

验证它们都是紧致连通 Lie 群, 并求出它们的 Lie 代数.

§ 7.6 伴随变换与伴随表示

一个可交换的群, 它的结构是相当简单的. 例如, 所有有限生成的可交换群具有十分简单的结构定理. 任何非 Abel 可换 Lie 群都是非平凡的. 一部分格与子群的商群. 因此, 群论的重点在于群的“不可交换性”, 即, 什么是一个群 G 的不可交换性呢? 一个自然的提法就是一个群 G 的不可交换性就是下述伴随变换.

定义 7.6.1 G 是一个群, 将群 G 表示成作用在它本身上的共轭 (内) 自同构群. 这个变换称为伴随变换

$$\text{Ad}: G \times G \rightarrow G, (g, x) \mapsto gxg^{-1}.$$

如果上述变换群是平凡变换群的情况就要求 G 是交换群. 如果 G 是一个 Lie 群, 则, 其伴随变换就是一个 Lie 变换群, 它的 Lie 结构可以规定整个 Lie 群论的枢纽.

伴随变换 $\text{Ad}: G \times G \rightarrow G$ 把每一个 $x \in G$ 表示成一个 G 本身的 G -自同构

$$\sigma_g: G \rightarrow G, \sigma_g(x) = gxg^{-1}.$$

相应地就有它在 Lie 代数 \mathfrak{g} 上诱导出的 \mathfrak{g} -自同构

$$\text{Ad}(g): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g},$$

即图 7.11 是可换的.

$$g(\text{Exp } tX)g^{-1} = \text{Exp}(t\text{Ad}(g)X), X \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}.$$

让上述 g 在 G 中变动, 就得到一个同态

$$\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g}),$$

叫做 G 的伴随表示. 再者, 上述同态又进而诱导出下述的 Lie 代数同态.

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{Ad(g)} & g \\ \downarrow \text{Exp} & & \downarrow \text{Exp} \\ G & \xrightarrow{\sigma_g} & G \end{array}$$

图 7.11

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{ad} & gl(g) \\ \downarrow \text{Exp} & & \downarrow \text{Exp} \\ G & \xrightarrow{Ad} & GL(g) \end{array}$$

图 7.12

使得图 7.12 可交换.

亦即

$$Ad(\text{Exp} sY) = \text{Exp}(s \cdot adY), Y \in g, s \in \mathbb{R}.$$

在本节中, 上面所做的就是对于任意变换映射 $Ad(g)$, $g \in G$, 这个“ g 变数”映射进行线性化. 换句话说, 先把 Ad 线性化, 就得到把 g 这个“ g 变数”线性化得到

$$g(\text{Exp} tX)g^{-1} = \text{Exp}(tAd(g)X).$$

第一步先把 Ad 线性化 (Exp), 这样就得到把 Ad 这个“ g 变数”也线性化了, 即得

$$\begin{aligned} \text{Exp}(sY) \cdot \text{Exp}(tX) \cdot \text{Exp}(-sY) &= \text{Exp}(t \cdot Ad(\text{Exp} sY)X) \\ &= \text{Exp}(t \text{Exp}(s \cdot adY)X) = \text{Exp}(tX + ts(ad(Y)X) + \text{高阶项}). \end{aligned}$$

可以得出

$$\text{Exp}(sY)\text{Exp}(tX)\text{Exp}(-sY)\text{Exp}(-tX) = \text{Exp}(tsad(Y)X).$$

但是在前面的已知

$$\text{Exp}(sY)\text{Exp}(tX)\text{Exp}(-sY)\text{Exp}(-tX) = \text{Exp}(ts[Y, X]),$$

这就证明了下述定理:

定理 7.6.1 $ad(Y) \cdot X = [Y, X]$.

先以 $GL(V)$ 为例来看它的伴随表示是什么. 由于 $GL(V)$ 的 Lie 代数就是 $\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{L}(V, V)$, 而且伴随映射可以用幂级数直接计算, 即

$$\text{Exp} X = I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{k!}X^k + \cdots, \quad X \in \mathfrak{L}(V, V).$$

因此, 式不难看出, 对于任给 $X \in \mathfrak{L}(V, V)$, $Y \in \mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{L}(V, V)$, 恒有

$$\begin{aligned} A \text{Exp} tXA^{-1} &= A(I + tX + \frac{t^2}{2!}X^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}X^k + \cdots)A^{-1} \\ &= I + t(AXA^{-1}) + \frac{t^2}{2!}(AXA^{-1})^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}(AXA^{-1})^k + \cdots \\ &= \text{Exp}(tAXA^{-1}). \end{aligned}$$

由此得, $Ad(A)X = AXA^{-1}$.

由于 $GL(V) = GL(n, C)$ (或 $GL(n, R)$), $\mathfrak{gl}(V) = M(n, C)$ (或 $M(n, R)$), 所以我们可以把上述结果改记为 $GL(n, C)$ 和 $GL(n, R)$ 的伴随表示的显有形式.

设 H 是 G 的一个连通子群, 它是它的 Lie 代数 \mathfrak{h} 的 Lie 子代数, $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{h})$ 和 $\text{Ad} : H \rightarrow GL(\mathfrak{h})$ 之间有如下关系, 以符号 ad 表示线性表示

$$H \subset G \xrightarrow{\text{Ad}} GL(\mathfrak{g}),$$

则 \mathfrak{h} 是在 Ad 的作用下不变的子空间, 把 H 的作用限制在 \mathfrak{h} 上, 记为 ad .

根据定理 7.6.1, 对 $\forall Z \in \mathfrak{h}$, $\text{ad}Z \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$. 由等式 (7.6.1) 和 (7.6.2) 知, $\text{ad}Z$ 有下列性质

$$\text{ad}Z \cdot [X, Y] = [\text{ad}Z \cdot X, Y] + [X, \text{ad}Z \cdot Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{h}.$$

定义 7.6.2 Lie 代数 \mathfrak{g} 的一个线性变换 D 叫做 \mathfrak{g} 的导子, 若

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

我们用 $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ 表示 \mathfrak{g} 的所有导子组成的集合. $\text{ad}Z \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ 自然是 \mathfrak{g} 的一个导子, 这样的导子叫做内导子, $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$.

令 $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ 表示 \mathfrak{g} 的自同构群, 则有

定理 7.6.2 $D \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ 当且仅当 $\text{Exp}tD \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$.

证明 只要证明

$$\begin{aligned} [DX, Y] &= [DX, Y] + [X, DY] \\ \Leftrightarrow (\text{Exp}tD)[X, Y] &= [\text{Exp}tD \cdot X, \text{Exp}tD \cdot Y] \end{aligned}$$

即可. 由定理 7.6.1, 对 $D \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$, $(D[X, Y] - [DX, Y] - [X, DY])$ 对任何 t 在 $t=0$ 处求导, 得出上式. 另一方面, 对任何自然数 k , 可验证

$$D^k[X, Y] = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D^i[X, D^{k-i}Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \text{其中 } D^0 \text{ 表示恒等映射}$$

下面我们假设所讨论的 Lie 群都是紧致连通的, 不再另外声明. 有了紧致性, 就可以在 Lie 群 G 的单位元 e 点的邻域 U 上取定一个在 $\text{Ad}(G)$ 的作用下不变的标架 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 即

$$\langle \text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{g}, g \in G.$$

对于这样取定的内积, 我们点任取 \mathfrak{g} 的一个标准正交基 $\{X_1, \dots, X_n\}$, 即 $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$. 然后, 我们用右平移把 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 分别拉成 G 上的左不变向量场, 而且依然用 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 记之. 这样就可以唯一地得到一个左不变的标架 $\{X_i(x)\}_{i=1}^n$ 在 G 上. 对 G 中任意一点 x , 总可以在 G 上建立一个黎曼空间的结构. 由左不变向量场 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 和左不变内积看, 出 G 上右平移都是这个黎曼空间的正交变换. 再者, 由 G 上的内积是左不变的, 不难验证 G 上右平移也是它的正交变换. 令 $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$ 在 G 上, $e_i(x) = X_i(x)$, $f_i(x) = X_i(e)$ 分别是左、右平移 L_x, R_x 在 x 点间之可逆诱导的线性映射, 则有性质 13 所公可换关系,

其中 $\alpha \cdot X = X\alpha - \alpha X$ 因为 dL 和 dR 都是正交的, 所以 dR 也是正交的. 因此,



图 7.13

从本节开始,我们总是假定 \mathfrak{g} 是一个紧致连通Lie群(即 \mathfrak{g} 有一个在左、右平移都正交的黎曼度规,有不变的Riemann度量,生成函数 $\lambda(x) = (x, x)$ 对于任意黎曼结构而言也是一个不变换点,本章的主要定理就是要证明这个不变度规群的轨几何的几何,简称为轨几何。一个群 G 的伴随变换的轨就是它的共轭类,所以伴随变换的轨几何也就是共轭类的几何。

前节我们已分析了 $\mathfrak{su}(n)$ 紧致Lie群的共轭类几何,其结果为 $\mathfrak{su}(n)$ 中的任何共轭类都和 $\mathfrak{su}(n)$ 相交,并且 $\mathfrak{su}(n) = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi]} \exp(i\theta H)$,再者,含有 H 的共轭类的维数是 $2(n-1)$,其中 n 是一个整数。这一共轭类几何的结果在 $\mathfrak{su}(n)$ 的所有复不可约线性表示的分类中起了决定性的作用。

现在让我们回到 $U(n)$ 为例,来看一下它的轨几何。在线性代数中有一个熟知的事实:任何酉矩阵 U 在 $U(n)$ 中可化为角阵,换句话说,存在适当的 $g \in U(n)$,使得 gAg^{-1} 为一个对角酉矩阵,令

$$T^n = \{ \exp(i\theta_1 E_1) \cdots \exp(i\theta_n E_n) \mid 0 \leq \theta_j \leq 2\pi \} \cong S^1 \times \cdots \times S^1$$

为 $U(n)$ 有 n 个对角酉阵 E_j 组成的子群,它同构于 n 个 S^1 之直积,称之为秩 n 的环群,则上述事实的另一说法是 T^n 和 $U(n)$ 中的任何子群都相交。再者,设 L 是 $U(n)$ 中的一个任意的子环群,我们可把 $L = U(n)$ 想成 $U(n)$ 作用在 \mathbb{C}^n 上的酉表示 ρ_1, \dots, ρ_n 是 \mathbb{C}^n 的一组内基,因为 L 是可换的,由任何子环群的不可能复表示都是 L -不变的,所以必存在一个 \mathbb{C}^n 的正交分解:

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k,$$

其中 V_i 都是复一维的 L -不变子空间,在每个 V_i 中各取一个单位长向量 α_i ,令 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$,则 α 是一个酉变换,且不难看出 $\alpha \in L = U(n)$,亦即 $U(n)$ 中的任意的环群都共轭于 T^n 中的子群,所以 T^n 等价于 $U(n)$ 中的 n 极大子环群,而且 $U(n)$ 中的任意极大子环群都和 T^n 共轭。

从上述分析,很自然就要问:由于直这 $\mathfrak{su}(n)$ 的共轭类几何和子环群的基本结果是否可以推广到所有的紧致连通Lie群呢?Cartan在Lie群论方面的重要贡

献之一就是下述极大子环群定理:

定理 7.6.3 设 G 是一个紧致连通 L -群, I 为其中任一极大子环群, 则 I 和 G 的任何共轭类都一定相交; G 中的任何极大子环群都和 I 共轭.

证明 我们把证明分成几步来做:

1. 设 I 是 G 的一个极大子环群, 我们将 G 在任随变换 Ad 和自随表示 $\lambda d: G \rightarrow g$ 分别限制到 T 上, 即得

$$Ad|_T: T \times G \rightarrow G \text{ 和 } Ad|_T: T \times g \rightarrow g.$$

对显然有 I 在 λd 的作用下每点都是不动点, 并且对于 T 上的任意 $t, t', \lambda d$ 在 t 的 G 的切空间 $\kappa(t)$ 上所诱导的线性表示都和 $\lambda d|_T: T \times \kappa \rightarrow \kappa$ 等价.

因为任何可换群的不可约复表示都是一维的, 不难由此推论任何任何环群的 n 重半不变子约表示都是一维的. 所以 $\lambda d|_T$ 可以分解成 n 个, 即 $\lambda d|_T$ 是 n 重半表示.

$\sum \varphi_i$.

相应地, g 就分解成不变子空间的直和 $g = \sum R_i \oplus g_0$, 其中 $R_i (g_0)$ 是 n 重半表示 $\varphi_i (1 \rightarrow \sum \varphi_i)$ 的表示. 由于由 I 的不可换性容易看出, 这 R_i 包含 I 的 L -代数; 再由 I 的极大性就知, 这 R_i 为 L 或不然, 就应找到 I 的一个包含 R_i 的比 I 更复杂的子环 I' 为 L -代数, 再用基本定理即得 I' 中一定包含 I 的比 I 为难的子环, 而这 I' 又包含 I , 自然是一个包含 I 的比 I 为难的子环群, 这就和 I 的极大性相矛盾, 所以 $R_i = \eta$. 今后称 η 为 g 的 Cartan 子代数.

2. 因为 $\varphi_i: I \rightarrow S(U_i)$ 都是 L -代数的, 所以 $\ker \varphi_i$ 都是 I 的低维子群. 因此 $\ker \varphi_i \neq I$, 且不含 I 中的任何 L -可集. 任取 $x \in I - \ker \varphi_i \subset I$, 令 t_0, t_n 在 G 中的 L -化子, 则 $t_0 = \kappa(t_0) + G_0/\kappa(t_0)$, 自然 t_0 的 L -子群用 G_0 表示. 在 G_0 的各单位元连通分支所组成的连通子群, 它一定在 L 的 L -代数. 任意, 这里的 κ 不表示 G 在 t_0 上的表示, 也就是说 $\kappa = \kappa_{t_0}$. 由 L -化子的定义, 显然有 $G_0 \subset I$, 我们可证明 $G_0 = I$. 设 $\lambda \in \kappa$ 是 L 中任给元素, $\lambda \in \mathbb{N}(\lambda) \subset \lambda \in G_0$, 亦即

$$\text{Exp}_s(Ad(t_0)x) = t_0(\text{Exp}_s X)t_0^{-1} = \text{Exp}_s X, s \in \mathbb{R},$$

因此, $\lambda d(t_0)X = \lambda$. 由于 $t_0 \in I = \ker \varphi_i$, 故 λ 只有在 $\lambda \in \eta = R_i$ 时才有可能, 所以 $\kappa = \eta, G_0 = T$.

3. 令 $G(t)$ 表示过 t 点的 $\lambda d(t)$ 轨道, 也就是包含 t 的共轭类. 显然, $G(t) \subset G/G_0$ (作为流形), 所以

$$\dim G(t) = \dim(G/G_0) - \dim(G_0) = \dim I - \dim \eta = \dim I - \dim G_0,$$

再有, 在 $\lambda d|_T$ 的作用之下, $t \in I$ 是一个不动点, $G(t)$ 和 I 则分别是不变子流形, 它们相交于 t 点. 因此, $\lambda d|_T$ 在定点 t 处关于 $G(t)$ 的切空间 $\kappa(t)$ 上所诱导的线性表示当然也

就有两个不变线性子空间,那就是 I 在 t 点的切空间和 $G(t)$ 在 t 点的切空间.再者,在 1) 中我们也已指出:可以用 dc 把表示 $(I, g^{-1}) \rightarrow (T, g(t))$ 两者等同起来,所以有 $g(t_0) = R^1 \oplus \sum R^2(q)$.

在上述分解式中,显然 R^1 就是那个 I 在 t 点的切空间,而 $\sum R^2(q)$ 就是那个 $G(t)$ 在 t 点的切空间.因为 I 对于 $G(t)$ 在 t 点的切空间的作用不可能含有任何非零的不动向量.不然的话,就容易推出 I 并不是极大子群.所以 $G(t)$ 和 I 在 t 点正交.现在我们就容易运用前述的 (1) 黎曼结构来完成本定理的证明.

先介绍两个有关黎曼几何的结论:

(i) 在任何黎曼流形中,正交变换群的不动子集总是一个全测地子流形.

(ii) 紧致连通黎曼空间 M 的任何闭子集,都存在至多该闭子集的极短测地线.

令 T, G 是 G 中 I 在 t 点作用的不动子集,与不难看出, T 是 $I \cap G$ 的一个连通分支.其实 $T = I \cap G$, 但是这一点目前要用到本定理, I 是 G 的一个全测地子流形.

设 $G(x)$ 是 G 中的一个任给的共轭类,因为 $G(t)$ 和 $G(x)$ 是 G 中的两个紧致子流形,所以存在一条连接于两者之间的极短测地线.它显然与 $G(t)$ 和 $G(x)$ 都是正交的(利用极值性即可证明).设这样一条测地线 γ 的端点分别是 $t \in G(t)$ 和 $x \in G(x)$, 设 $\gamma = g \cdot \kappa$, 我们利用把这条测地线 γ 用共轨 $h \cdot \kappa$ 这个正交变换加以搬动,即得 $\gamma = h \cdot \kappa$ (图 11) 也是一条 $g \cdot t^{-1}$ 垂直于 $G(t)$ 的测地线,而且 $\gamma = g \cdot \kappa = g \cdot G(x)$ 为其中一边.再者,因为 t 和 x 相同.这是由于 $t \in G(t) \perp I = G(t)$, 而 I 又是一个全测地子流形,所以 $t \in I$, 这就证明了 $I \cap G(x)$ 至少交于一点,例如 x , 但是 $G(x)$ 是任意一个共轭类,这也证明了 I 和 G 中的任何共轭类都相交.

设 I 是 G 中任给的另一极大子群.我们可以在 I 中取一个元素 t , 使得 t 所生成的子群 $\langle t \rangle$ 在 I 中到处稠密, 亦即, $\langle t \rangle = I$. 由 1) 可知, 存在 $\kappa \in G$, 使得 $gt_1g^{-1} \in T$, 因此 $gT_1g^{-1} = g \langle \kappa_1 \rangle g^{-1} = \langle g\kappa_1g^{-1} \rangle \subset T$.

由 T_1 和 T 的极大性可知 $gT_1g^{-1} = T$.

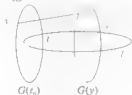


图 11

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{Ad(g)} & \\
 \text{Exp} \uparrow & & \uparrow \text{Exp} \\
 \eta & \xrightarrow{Ad(g)} & \eta
 \end{array}$$

图 7.15

换句话说, $\Lambda(T, G)$ 也是 η 在 G 中的正规化子, 而 I 则是 η 在 G 中的中心化子, 所以 $W(G)$ 也是 η 上的变换群.

我们记 $\eta, G/\Lambda(G)$ 分别表示伴随变换群和伴随表示的轨道空间. 以 $G/\Lambda(G)$ 为例, $G/\Lambda(G)$ 中的每个点都是由 G 中的一个共轭类所组成, 即

$$\pi: G \rightarrow G/\Lambda(G)$$

把每个轨道映射到一点, 并取商拓扑.

再有, 我们以 I/W 和 η/W 分别表示 I 和 η 在 $W(G)$ 作用下的轨道空间, 则不难画出有如图 7.16 所示可换图解.

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\subset} & G \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 T/W & \longrightarrow & G/\Lambda(G)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \eta & \longrightarrow & g \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \eta/W & \longrightarrow & g/\Lambda(G)
 \end{array}$$

图 7.16

定理 7.6.8 在上述图解中, 映射 $T/W \rightarrow G/\Lambda(G)$ 和 $\eta/W \rightarrow g/\Lambda(G)$ 都是 $W(G)$ 上的映射.

证明 因为 $\eta/W \rightarrow g/\Lambda(G)$ 就是 $I/W \rightarrow G/\Lambda(G)$ 的线性化和局部化, 所以我们只需证明 $T/W \rightarrow G/\Lambda(G)$ 是一一在上的映射.

首先, T 和 G 中任何共轭类都相交, 这表示 $I/W \rightarrow G/\Lambda(G)$ 是一个满射. 下面, 我们证明它也是一一对应. 这已就是要证明下述事实: 对于任何元素 $t \in I, G, t \in I, I/W \rightarrow T$, 这里 I/W 表示 t 在 $W(G)$ 作用之下的轨道. 显然有

$$G(t_0) \cap T = G(t_0) \cap F(T, G) = F(T, G(t_0)).$$

又因为 $G(t_0) \cong G/G_{t_0}, G_{t_0} \supset T$, 而且显然有

$$xG_{t_0} \in F(T, G/G_{t_0}) \Leftrightarrow xG_{t_0}x^{-1} \supset T \Leftrightarrow G_{t_0} \supset x^{-1}Tx,$$

所以我们只要证明, 对于任给的 $xG_{t_0} \in F(T, G/G_{t_0})$, 定有一个元素 $n \in N(T, G)$, 使得 $xG_{t_0} = nG_{t_0}$ 即可. 由于 I 和 $x^{-1}Tx$ 都是 G 的极大子环群, 所以存在 $g \in G$, 使得 $xTx = g^{-1}Txg$, 亦即 $(xg) \subset T(xg)$, $T, xg \in N(T, G)$, 这就证明了

或者说

$$G \xrightarrow{\varphi} GL(n, R) \subset GL(n, C).$$

定义 7.7.2 根系 设 \mathfrak{g} 是一个紧致连通 Lie 群, I 是 \mathfrak{g} 的一个选定的极大子环群 \mathfrak{g} 的任随表示 λ 的 \mathfrak{g} 的非零权, 即 $\lambda \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ 且 $\lambda(H) \in i\mathbb{R}$ 且 $\lambda(X) = 0$ 的 $X \in \mathfrak{g}$ 的全体组成的集合, 叫做 \mathfrak{g} 的根系, 我们常以 $\Delta_{\mathfrak{g}}$ 或 Δ 表示之.

$\lambda \in \mathfrak{g}^*$ 的零权的重数就是 $\dim \mathfrak{g}_{\lambda} = 1$ 在 \mathfrak{g} 中我们将表明它的所有非零权的重数都是 1. 因此, 我们得知, Δ 是 $\mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ 中重数为 1 的集合. 每个根的重数都是 1, 但是这要在证明了上述事实之后才可以这样说.

定义 7.7.3 Cartan 分解 根系 Δ 的基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是 \mathfrak{g} 的分解, 它是 \mathfrak{g} 作用 $I \subset \mathfrak{g}$ 的 I 变换群. 在上述 I 的作用之下, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ 分解为下列不变子空间的直和, 即

$$\mathfrak{g} \otimes C = \mathfrak{g}_0 \otimes C + \sum V_{\alpha}, \quad \dim_C V_{\alpha} = a \text{ 的重数,}$$

此分解式称为 \mathfrak{g} 的复 (Cartan) 分解, 其中 I 在 $\mathfrak{g}_0 \otimes C$ 上的作用是平凡的, 而 $\exp tI, I$ 在 V 上的作用就是将其中的每个元素乘上 $e^{\pm i t a}$.

$$\lambda \in \mathfrak{g}_0 \otimes C \implies [I, X] = 0, \quad X \in V_{\alpha} \implies [I, X] = \pm i a X.$$

其实, 它是 $\mathfrak{g} \otimes C$ 的一个分解式.

因为任何 I 的 \mathfrak{g} 的表示 λ 均表示都是一串 $\pm i a$, 因此, 我们也可将 \mathfrak{g} 直接按 \mathfrak{g}_0 本身加以分解, 即有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum m_{\alpha} R_{i(\alpha)},$$

此分解式称为 \mathfrak{g} 的实 (Cartan) 分解, 其中 m_{α} 是指 \mathfrak{g} 在 $\mathfrak{g}_0 \otimes C$ 中的重数 (即 \mathfrak{g} 将 \mathfrak{g}_0 中 \mathfrak{g}_0 的 \mathfrak{g}_0 乘 $\pm i a$ 的 \mathfrak{g}_0 的 R 的直和, 且 I 在 R 上的作用 λ 为 $\pm i a$ 对于任意的 $H \in \mathfrak{g}_0$, $[X, H] = \pm i a X$ 在 R 上的作用是一个 $\pm a$ 的 H 的旋转, 即对 R 上的 X, Y 之交 X, Y 来说, $\exp H$ 相应的矩阵为

$$\cos 2\pi a(H) \quad -\sin 2\pi a(H)$$

$$\sin 2\pi a(H) \quad \cos 2\pi a(H)$$

例 7.7.1 $SO(3)$ 前面已对于它的结构和复不可约表示做过详细的讨论. 现在把在那里所得的结果再用根系、根系的概念加以表示.

1) $S^1 = \{e^{2\pi i \theta}, 0 \leq \theta \leq 1\}$ 就是 S^1 的一个极大子环群.

2) 将 S^1 到 $SU(2)$ 的同构映射 φ 限制到 S^1 上, 即得

$$\varphi|_{S^1}: S^1 \rightarrow SU(2); e^{2\pi i \theta} \mapsto \begin{pmatrix} e^{2\pi i \theta} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i \theta} \end{pmatrix}.$$

如果仍用 φ 及 ψ 表示 R 上的线性函数, $\varphi(X) = iX$ 及 $\psi(X) = -iX$, $X \in R$, 此

由权系的定义即有 $\Omega(\varphi_1) = \{\theta, -\theta, \text{重数均为 } 1\}$.

$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 的伴随表示 $\text{Ad}: \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SL}(9, \mathbb{C})$ 是一个 9 维实表示, 它的复化 $\text{Ad}: \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SL}(9, \mathbb{C})$ 是一个 9 维复不可约表示, 而 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 的 9 维复不可约表示在等价意义上是唯一的, 即 φ , 因此 $\text{Ad}_{\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})} \otimes \mathbb{C} \cong \varphi$. 由 φ_1 的定义不难得出

$$\varphi_1|_{\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})} \rightarrow U(3); e^{2\pi i \theta} \mapsto \begin{pmatrix} e^{4\pi i \theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 $\Omega(\varphi_1) = \{2\theta, -2\theta, \text{重数均为 } 1\}$. 因此 $\Omega(\varphi) = \{\theta, -\theta, \text{重数均为 } 1\}$. 换句话说, $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 只有 3 对根, 一正一负, 互为相反, 重数为 1.

同理可得 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 的任一复不可约表示 φ_k (为 k 个非零整数) 的权系是

$$\Omega(\varphi_k) = \{k\theta, (k-2)\theta, \dots, -(k-2)\theta, -k\theta\},$$

权的重数均为 1. 它们构成一个由 k 个 θ 的“等差向量列”, 且公差为 θ . 这恰是 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 的唯一正根.

例 7.2 $G = \text{SL}(3, \mathbb{R})$ 的伴随表示 $\text{Ad}: \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \rightarrow \text{SL}(9, \mathbb{R})$ 是一个 9 维实不可约表示, 它的核 $\text{Ad}^{-1}(e) = \{\pm 1\}$, 因此 $S^3/\{\pm 1\} \cong \text{SO}(3)$.

这表明 Ad 是一个覆盖同态. 由此可知, $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ 也是秩 1 的, 例如有如图 7.18 的图群.

$$\begin{array}{ccc} \{\theta\} = R^1 \rightarrow R^1 \circ \{\theta'\} & \equiv & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \theta' \\ \theta' & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \uparrow & \downarrow \text{Exp} & \uparrow \text{Exp} \\ \{e^{2\pi i \theta}\} = S^1 \rightarrow \text{SO}(2) & \equiv & \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\pi \theta' & \sin 2\pi \theta' \\ \sin 2\pi \theta' & \cos 2\pi \theta' \end{pmatrix} \right\} \\ \uparrow \pi & \downarrow \pi & \\ S^3 & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{SO}(3) \equiv S^3/\{\pm 1\} \end{array}$$

图 7.18

在上述图解中, 映射 $R: R^1 \rightarrow R^1$ 将 $\theta \mapsto \theta'$, 且 θ 和 θ' 分别是 S^1 和 $\text{SO}(2)$ 的基本参数. 利用上述覆盖同态, 我们可以把 $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ 的任何一个表示 $\varphi: \text{SL}(3, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(V)$ 提升为一个 S^3 的表示, 即

$$\varphi = \psi \circ \text{Ad}_{\text{SL}(3, \mathbb{R})}: S^3 \xrightarrow{\text{Ad}} \text{SO}(3) \rightarrow \text{GL}(V).$$

它是一个满足 $\ker(\varphi) \supset \{\pm 1\}$ 的表示.

反之, $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ 的任何满足 $\ker(\varphi) \neq \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ 的表示 $\varphi: \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(V)$ 也都可以压缩成一个 $\text{SO}(3)$ 的表示, 使得 $\varphi = \psi \circ \text{Ad}$. 我们可以用如图 7.19 所示的图解表明上述关系.

除了 φ 是平凡表示的特殊情形外, 均有 $\ker(\varphi) = \{\pm 1\}$, 而且只有 $\ker(\varphi) = \{\pm 1\}$ 和

$$\begin{array}{ccc}
 \{\pm 1\} \subset S^1 & \xrightarrow{\varphi} & GL(V) \quad \ker(\varphi) \supset \{\pm 1\} \\
 \text{\scriptsize Ad} \downarrow & & \nearrow \psi \\
 S^1/\{\pm 1\} \cong SO(3) & &
 \end{array}$$

图 7.19

$\ker(\varphi)$ 有两种可能,也就是说, $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$, 而 $\ker(\varphi) = \{1\}$ 的充分必要条件是权系 $\Omega(\varphi)$ 中所含的向量都是 θ 的偶数倍,所以,从权系的观点来看,上述相应的线性表示 φ 和 ψ 之间的关系就是

$\Omega(\varphi)$ 中所含的向量都是 2θ 的整数倍,

$\Omega(\psi)$ 就是把 $\Omega(\varphi)$ 中的 2θ 改写成 θ 者.

在 \mathfrak{h} 的所有复不可约表示 $IR(\lambda)$ 中, $\lambda = \lambda_1\theta + \lambda_2\theta + \cdots + \lambda_n\theta$ 之中,当且仅当 k 是偶数 $2l$ 时, $\ker(\varphi_k) = \{\pm 1\}$, 所以

$$IR(SO(3)) = \{\phi_{2l} | l = 0, 1, 2, \dots, \phi_{2l} = \phi_{2l} \circ Ad\},$$

$$\Omega(\phi_{2l}) = \{2l\theta, (2l-1)\theta, \dots, -l\theta\}, \text{重数皆为 } 1$$

例 7.7.3 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 的 Lie 代数由 $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ 是覆盖同构,所以两者的 Lie 代数是同构的,我们将以 \mathfrak{a} 表示之, \mathfrak{a} 是一个单秩的不可换 Lie 代数,它的 Cartan 分解式为

$$\mathfrak{a}_1 = R^1 \oplus R_{1+\theta}^1 (\text{或 } R^1 \oplus R_{1+2\theta}^1).$$

我们可以在 R^1 中选取基底 H , 使得

$$Ad(\text{Exp} H) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO(2),$$

并且令 X, Y 是 $R_{1+\theta}^1$ 中一组相应的正交基底, 则有

$$\text{Exp}(tad H) \cdot X = Ad(\text{Exp} tH) \cdot X = (\cos t)X + (\sin t)Y,$$

$$\text{Exp}(tad H) \cdot Y = Ad(\text{Exp} tH) \cdot Y = (-\sin t)X + (\cos t)Y.$$

将上式左、右两边分别对 t 求导, 然后代以 $t=0$, 即得

$$\begin{cases} [H, X] = ad H \cdot X = Y, \\ [H, Y] = ad H \cdot Y = -X. \end{cases}$$

因此, 再利用 Jacobi 恒等式, 我们便得到

$$[[X, Y], H] = -[[H, X], Y] - [[Y, H], X] = 0.$$

X, Y 与 H 必定线性相关, 要不然, \mathfrak{a} 中就有一个三维的可换子代数, 这显然与 \mathfrak{a} 是秩 1 的事实相矛盾. 设 $X, Y = \lambda H$, 我们要说明 $\lambda = 0$. 令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 \mathfrak{a} 上任取的一个 Ad 不变内积, 则有

$$\langle Ad(\text{Exp} tX)Y, Ad(\text{Exp} tX)H \rangle = \langle Y, H \rangle (\text{与 } t \text{ 无关}).$$

将此式对 t 在 $t = 0$ 处求导, 即得 $\langle X, Y \rangle = \langle H, Y \rangle = \langle X, H \rangle$, 亦即 $\langle \text{ad} H, H \rangle = \langle Y, -Y \rangle = 0$, 从而 $\lambda = \langle Y, Y \rangle / \langle H, H \rangle > 0$.

再令

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\lambda} \langle X, Y \rangle Y = \frac{1}{\lambda} \langle Y, H \rangle H, \text{ 则有 } [H, X] = Y, \\ [X, Y] &= H. \end{aligned}$$

这样一组基底 $\{H, X, Y\}$ 叫做 Lie 代数 \mathfrak{g} 的标准基底.

定理 7.7.1 设 G 为 n 维实 Lie 群的连通子群, 若 $\text{rank}(G) = 1$, 则 G 必与 N 或 $\text{SO}(3)$ 中之一同构.

证明 因为 G 上有可交换子系生成 \mathfrak{g} , 故都和 N 同构, 所以我们只需要讨论 G 是不连通的情形. 设 I 是 G 的一个极大子群, 且假设 $\text{rank}(G) = 1$, 所以 I 是一阶的, 我们采用参数 $t = \pi s$ 来表式 $I = \{e^s X\}$ 中, 角 $\theta = R = 2\pi Z$.

设 g 的 Cartan 分解为

$$\mathfrak{g} = K \oplus R \oplus \cdots \oplus R_{n-1},$$

由参数的选取 $\langle X, Y \rangle = \langle X, H \rangle = 1$, θ, R 为 2π 的整数, $e^{\theta} R = e^{2\pi i k}$ 就是 Ad 的本可因子空间, 而且 T^1 在 R_{n-1} 上的表示是:

$$h: T^1 \rightarrow \text{SO}(2), h(t) = \begin{pmatrix} \cos n_t & -\sin n_t \\ \sin n_t & \cos n_t \end{pmatrix}.$$

我们不妨假设 n 为整数集 $n = 1, \dots, n$ 满足 $n_1 < \dots < n_n$.

引例 首先, 我们取 $n_1 = 1, n_2 = R$ 和 K 的基底 H 和 X, Y , 使得

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\text{Exp} H)X &= (\cos n_1 t)X + (\sin n_1 t)Y, \\ \text{Ad}(\text{Exp} H)Y &= -(\sin n_1 t)X + (\cos n_1 t)Y. \end{aligned}$$

同样地, 将上式对 t 在 $t = 0$ 处微分, 就得出

$$[H, X] = n_1 Y \quad \text{和} \quad [H, Y] = -n_1 X.$$

令

$$H' = \frac{1}{n_1} H, \text{ 则有 } [H', X] = Y \text{ 和 } [H', Y] = -X.$$

从这里, 就可以改取

$$X' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X, Y' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Y \text{ (其中 } [X, Y] = \lambda H', \lambda > 0),$$

即得括弧关系

$$\begin{aligned} [H', X'] &= Y', \\ [H', Y'] &= -X', \\ [X', Y'] &= H'. \end{aligned}$$

将此式与前式相对比,就看出由 H, X, Y 生成的子代数 \mathfrak{g} 是一个与 \mathfrak{a} 同构的 Lie 子代数(在 \mathfrak{g} 中含有一个与 N 或 $SO(n)$ 同构的 Lie 子群 G , 它的 Lie 代数就记上述 \mathfrak{g}).

为此为止,本定理的证明也就可得到要去, 用 G 乙和等 $1/G$ 换句话,就是要从假设 G 真包含 G_1 得出矛盾. 我们已知 G_1 是 \mathfrak{a} 的正规化子, 所以 G_1 在 \mathfrak{a} 上的作用限制到 G 上, 则 \mathfrak{g} 显然是 G_1 不变的, 所以 \mathfrak{g}_1 的正交补空间

$$\mathfrak{g}_1^\perp = R_{G_1}^1 \oplus \cdots \oplus R_{G_1}^l,$$

当然也是 G 不变的. 现在分 $G = SO(n)$ 和 $G = Sp(n, \mathbb{C})$ 这两种情形来讨论.

(1) 若 $G = SO(n)$, 上述 G 在 \mathfrak{a} 上的作用就记为 \mathfrak{a} 的一个复表示

$$\varphi: SO(n) \rightarrow U(2k-2).$$

因为 $n = 2, 4, \dots, 2k$, 所以权系 Ω_φ 中的向量不是 0 , 就是 ± 1 .

换句话说, Ω_φ 中只含有任何向量 λ , $\lambda = \alpha + \beta$, $\alpha = 0$ 或 ± 1 . 但是, 与例 7.7.1 的讨论可知, Ω_φ 必由正交对称的公式与 \mathfrak{a} 的偶次向量 λ 合成而成, 所以当然不能出现像上面这种跨变为 1 的向量! 因此又和假设矛盾, 得证.

(2) 若 $G = Sp(n, \mathbb{C})$, 上述 G 在 \mathfrak{a} 上的作用记为 \mathfrak{a} 的一个复表示

$$\psi: SO(3) \rightarrow U(2k-2),$$

它的权系必含有零权, 这(例如在例 7.7.1 的权系 Ω_ψ 中, 为 $SO(3)$ 的任何复不可约表示的权系一定含有零权, 参看例 7.7.2).

总之, G 真包含 G_1 这种假设不能对 \mathfrak{a} 可非 0 , $\mathfrak{a} \neq 0$ 成立. 于是

定理 7.7.2 设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ 系取直积 \mathfrak{a} 和 \mathfrak{g} 的根系, 则其中的任何 k 个根 α_i 和数都是 1, 而且 $k\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$ 的充要条件是 $k = \pm 1$.

证明 取 $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{a}$ 又取 $R(\mathfrak{g}) \rightarrow R(\mathfrak{g}_1)$ 上的一个整线性函数 χ , 于是 $\chi(\mathfrak{g}_1)$ 为 \mathfrak{g} 的 Lie 代数的子环群, 且令

$$\begin{cases} G_\chi = Z(T_\chi, G) = \{g \in G; gt = tg, \forall t \in T_\chi\}, \\ \tilde{G}_\chi = G_\chi/T_\chi. \end{cases}$$

令 \mathfrak{g}_χ 和 $\tilde{\mathfrak{g}}_\chi$ 分别是 G_χ 和 \tilde{G}_χ 的 Lie 代数. 不难验证

$$\mathfrak{g}_\chi = \{X \in \mathfrak{g}; \text{Ad}(t)X = X, \forall t \in T_\chi\} = \{X \in \mathfrak{g}; [H, X] = 0, \forall H \in \ker(\alpha)\}.$$

于是由 \mathfrak{a} 的实 Cartan 分解就不难得到 $\mathfrak{g}_\chi = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_1$ (\mathfrak{g}_1 可分解为

$$\mathfrak{g}_1 = \eta \oplus \sum_{\beta \in \Delta_1} m_\beta R_{\beta, \beta}^1,$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\chi = \eta/\text{Ker}(\alpha) \oplus \sum_{\beta \in \Delta_1} m_\beta R_{\beta, \beta}^1 \simeq R^1 \oplus \sum_{\beta \in \Delta_1} m_\beta R_{\beta, \beta}^1.$$

在式(7.7.1)取 $\chi = 0$ 线性相关的根, 亦即 $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\alpha)$ 者, 所以 G_χ 是一个秩 1 的

紧致连通 Lie 群, 知 $\dim \tilde{G}_\alpha = 3$, 从而 $\rho^2 = -\alpha$, 且 $m_\alpha = m_{-\alpha} = 1$.

为了便于运用几何术语来描述根系的结构, 我们将从现在开始, 在 \mathfrak{g} 上取定一个 Ad 不变的内积, 然后, 利用其局限于 η 上的内积结构把 η^+ 与 η^- 对等起来, 亦即 η^+ 到 η^- 的同构映射

$$\epsilon_1: \tau(\alpha), H) = \alpha(H)$$

对任何 $\alpha \in \eta^+$ 及 $H \in \eta$ 恒成立. 这样, 就可以把原先是 η^+ 中的子集 $\tau(\alpha)$ 和 η^- 中的子集 $\alpha(H)$ 对等起来. 而我们从现在开始, 就把根系的定义更新为上述 η 中的子集. 所以, 今后 $\tau(\alpha)$ 是 η 中一个不带重数的 (因为每个根 α 的重数皆为 1) 的正向量子集. 当然, 在改换根系的新定义之后, 原先用以描述复 Cartan 分解的公式就得改写为

$$Ad(\exp H)X_\alpha = e^{\alpha(H)}X_\alpha, \quad H \in \eta, X_\alpha \in V_\alpha.$$

而原先的 $\kappa(\alpha)$ 就可以改写为 (α) , 即 α 的正交补空间.

为进一步讨论根系的性质, 我们对 G_α 的表示 $\tau(\alpha)$ 作进一步的分析.

1) 对 $\tau(\alpha)$ 中任给的一对根 $\pm \alpha$, G_α 是一个和 G 本身同秩的紧致连通 Lie 群, 其根系和 Lie 代数分别是:

$$\Delta(G_\alpha) = \{\pm \alpha\},$$

$$\mathfrak{g}_\alpha = \eta \oplus R_\alpha, \quad R_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \alpha] = \alpha X\} = R_{-\alpha}.$$

其中 $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g} \cap R_\alpha$ 是一个和 \mathfrak{g} 同构的三维 Lie 代数, 所以存在一个由 $I \times S^1$ 到 G_α 的覆盖同态 $\rho: T_\alpha \times S^1 \rightarrow G_\alpha$.

2) 当我们把 G 在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{C}$ 上的伴随表示限制到 η 上时, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{C}$ 的 η 不可约直和分解就是它的复 Cartan 分解.

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \eta \oplus \mathfrak{C} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} V_\alpha, \quad \dim V_\alpha = 1.$$

上述 G_α 是一个介于 G 与 I 之间的子群. 所以在 Ad 的作用下, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{C}$ 的 G_α 不可约直和分解, 以说是上述复 Cartan 分解的前身. 换句话讲, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{C}$ 中的任一 G_α 不可约子空间都是由 η 分解式中的某一适当部分合并而成. 再者, 如同例 7.6.1 的讨论一样, 我们已可以把 G 的一个复不可约表示 φ 用覆盖同态 ρ 把它提升成一个 $I \times S^1$ 的复不可约表示 $\psi = \varphi \circ \rho$. 这样就有 $I \times S^1$ 的复不可约表示都有下列形式 $\rho \circ \psi$, 其中 ψ 是 I 的一个复二维表示, 它的权是 $-\alpha$ 与 $-\alpha + \alpha$ 向量, 而 ψ 是 S^1 的一维复不可约表示, 它的权系是一个公差为 α 的唯一的根系的等差数列, 它们都在子空间 \mathfrak{g}_α 中, 且对于 $\alpha \rightarrow -\alpha$ 成反射对称. 另一方面, 由权与特征值的关系以及作张量积时特征值相乘这一基本事实不难看出, $\rho \circ \psi$ 的权系与 ψ 的权系以及 ρ 的权之间的关系可以用图 7.20 表示. 因此,

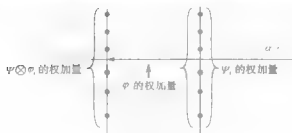


图 7.20

$\rho \in \mathfrak{g}$ 亦即 $T \in \mathfrak{N}$ 的复不可约表示的权系也是一个公差为 α , 关于 $\frac{1}{2}\langle \alpha, \alpha \rangle$ 成反对称的 α 等差向量列, 以后简称为 α 等差向量列。

因为 ρ_0 当然是 G_0 不变的, 所以我们可以先把 ρ_0 分解成下述一个不变子空间的直和, 即

$$g \otimes C = \langle \alpha \rangle \otimes C \oplus \tilde{g}_\alpha \otimes C \oplus \sum_{\beta \neq \pm \alpha} V_\beta.$$

再者, 若 U 是包含 V 的那个 G_0 不可约子空间, 则 (G_0, U) 这个复不可约表示的权系必构成一个 α 等差向量列 $\beta = \rho_0 + q\alpha = \beta - p\alpha$, 而且 $\beta = \rho_0 + q\alpha$ 与 $\beta = \rho_0 - p\alpha$ 关于 $\frac{1}{2}\langle \alpha, \alpha \rangle$ 对称. 由于关于 $\langle \alpha \rangle$ 的对称 r_α 可表为

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

所以 $\beta + q\alpha = r_\alpha(\beta + p\alpha) = (\beta + p\alpha) - \frac{2(\beta + p\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$.

即 $(p+q)\alpha = -\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha - \frac{2(p\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = -(p+q)\alpha$.

请参看图 7.21 所示.

又因为 V_i 的维数都是 1, 不难看出, $\Delta(G)$ 中除了上述 α 等差向量列之外, 就不可能再含有其他也能写成 $\beta + ja$ 形式的根了!

总结上述三点分析, 即有下述定理:

定理 7.7.3 在 Ad 的作用下, ρ_0 的完全分解如下:

$$g \otimes C = \langle \alpha \rangle \otimes C \oplus \tilde{g}_\alpha \otimes C \oplus$$

$$\sum_{j \neq 0} V_j.$$

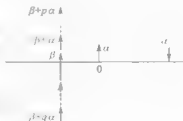


图 7.21

其中 $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ 表示包含了 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 之中的过 P 的 α 向量列. 再者, 我们还有下述重要关系式

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = -(\rho + q).$$

§ 7.8 伴随变换的轨几何

在本章开始, 我们就指出了伴随变换的轨几何在群论研究中的重要性. 例如, 在 $G = S^1$ 这个实例中, 我们可以把它想成是 $Q = R^2$ 中的单位圆, 则其伴随变换就可以看作是以实数轴为转轴的 S^1 旋转变换. 类似 S^1 的伴随变换的轨几何是很容易算的.

本节将在前节结果的基础上, 把前面对 S^1 的轨类几何的这种了解, 推广到一般紧连通 Lie 群的范围. 有了这种了解, 就可以直接广泛地得到紧连通 Lie 群表示论的基本定理.

1) 已知下述基本事实:

$$G/\bar{A}d \cong T/W, \quad g/Ad \cong \eta/W,$$

且 $T = G$ 和 $\eta = A$ 分别分别是 G 和 A 的个流形子流形, 而且它们又都分别是 G 和 A 中的任一轨道正交. 这已说明了 G 或 A 的轨几何的几何部分是可以转化为 (W, I) 或 (W, η) 的轨几何来加以理解与计算的.

2) 由于特征函数的积分计算在群表示中起着主要地位, 讨论 G 的轨类几何的几何部分的重点当然应该是: 怎样有效地计算各具轨类的体积, 并且把它们组织成个体积函数有 S^1 的情形. 这个体积函数就是 $\sin t$.

3) 对于任给的 $(\pm \alpha) \in \Delta(G)$, 显然有

$$T \subset N(T, G_*) \subset N(T, G).$$

由此即可得到 $W = W(G)$ 中的一个二阶子群

$$W(G) = \frac{N(T, G)}{T} \supset \frac{N(T, G_*)}{T} = W(G_*) \cong Z_2.$$

我们将以 r 表示 $W(G)$ 中的那个二阶元素, 不难看出它在 I 和 η 上的作用是分别以 T 和 $\langle \alpha \rangle^\perp$ 为不动点集的那个反射对称. 令

$$W' = \langle r, \pm \alpha \in \Delta(G) \rangle$$

是 W 中由所有 r 这种反射对称所生成的子群. 我们将证明 $W = W'$.

4) 由于 $W' = W$, 所以 (W, I) 是一个反射变换群 (对每个反射对称), 它的不动点集 $F(r)$ 是余维一的, 而且每个 I 把 W 中空间分成两个不相交的部分. 而开集 $I \cap F(r)$ 是一块块连通开集的并集, 每一个连通区域 C 就叫做一个 W 室房. 可以计

明 W 在 $Weyl$ 房组成的集合上的作用是单传递的. 因此, 我们只要在 I 中任取一个 Weyl 房 C_0 , 则 \bar{C}_0 构成 (W, T) 的一个基本域. 所以

$$G/\bar{A}d \simeq T/W \simeq C_0.$$

亦即 C 有 C 中的任意共轭类都相交于且仅交于一个 C_0 , 而且对于任一个内点 $t \in C$, 均有 $W_t = \{e\}, G_t = T$.

基于上述分析, 我们有

定理 7.8.1 $W, \alpha, \sigma \in \Delta, f, G, I$ 在 I 和 T 上的作用都是反射变换群, 亦即它是由反射对称 $\langle r_\alpha | \alpha \in \Delta(G) \rangle$ 所生成的群.

证明 由上面的分析, 中已经指出 W 包含那个由反射对称

$$\langle r_\alpha | \alpha \in \Delta(G) \rangle$$

所生成的子群 W , 所以我们只要证明 $W = W$ 即可. 另一方面, 因为 (W, η) 是 (W, T) 的局部化和线性化, 所以只讨论面的情形已足够了.

假设 $W \neq W$, 则 W 在 W 上的集合 σ 是可逆的, 所以一定有 W 中的元素 $\sigma \neq e$ 及一个 Weyl 房 C , 使得 $\sigma(C) = C$ 且 σ 是变换, 即, σ 在 C 上的作用一定有不不动点. 由于 C 是 C 的凸, 自然 $\sigma = I$, 于是 σ 不是单位元素, 且 $C = I$ 和 C 本身上无意义. 另一方面, C 是单参数子群 $\exp tX, t \in R$ 的线性化, 亦即是 C 的闭包 $\bar{C} = \exp tX$ 这个子群的中心化子 Z_X , 但是 Z_X 是连通的, 因此 C 连通, 这与上述 G_0 非连通性矛盾, 所以只能 $\sigma = e$ 且 $W = W'$.

为了建立 Weyl 的积分公式, 我们先给一些定义, 这对以后的讨论也很有用处. 设 η 是 I 的 Lie 代数. 在 η 上我们选取一个与星之间的大小次序. 例如按 η 上某个坐标系建立起来的字典排列法, 即若 $\alpha, \beta \in \eta$, 对 η 上取定的坐标系来说, 坐标分别是 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 和 $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, 则 $\alpha < \beta$ 当且仅当存在 $i \in \{1, \dots, n\}$, 且有 $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}$ 且 $\alpha_i < \beta_i$. 对这种长度的次序, 把 η 中的子群分成根系, 即 $\eta = \eta^+ \cup \eta^-$, 分别称为 η 上根和负根. 所有正根的集合记为 η^+ 根系, 所有负根集合记为 η^- 负根系, 于是 $\Delta(G) = \Delta^+ \cup \Delta^-$. 不仅如此, 令

$$C_0 = \{H \in \eta; \langle \alpha, H \rangle > 0, \forall \alpha \in \Delta^+\}.$$

不难验证 C_0 是一个 Weyl 房, 称之为相, 与上述定义的基本 Weyl 房. 在 η 中, 使得 $C = \{H \in \eta; \langle \alpha, H \rangle = 0, \alpha \in \Delta^+\}$ 的 α 的集合, 叫做相. 于这个次序的素根系, 不难证明素根系构成 η 的一组基, 每个 η 中 η 均可以表示为 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的非负整数线性组合.

定理 7.8.2 (Weyl 积分公式) 设在紧连通 1 -群 G 中, 已取定了总体积为 1 的左、右不变的黎曼结构, f 为其上任何 1 -函数 (亦即在任何共轭类, 皆取等值的函数, 或者说是 1 -不变函数), 则有下列 Weyl 积分公式

$$\int_G f(g) dg = \frac{1}{|W|} \int_T f(t) |Q(t)|^2 dt,$$

其中 $|W|$ 表示 W 中元素个数, 当 $t = \exp H (H \in \eta)$ 时, $Q(t)$ 可以用下式表达:

$$Q(\exp H) = \sum_{\sigma \in W} \text{sign}(\sigma) e^{2m(\sigma(\delta), H)},$$

其中 δ 是所有对于 C_0 而言的正根之和的一半, 亦即 $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+(G)} \alpha$.

证明 1) 从上面关于 G 上 $\bar{A}d$ 的轨几何的分析, 我们知道 T 是一个全测地子流形, 而且和每个共轭类都正交. 再者, $\bar{C}_0 \cong T/W \cong G/\bar{A}d$, 是一个优良的基本域, 其上任给两点 t_1 和 t_2 , 它们在 \bar{C}_0 中的距离也就是共轭类 $G(t_1)$ 和 $G(t_2)$ 在 G 中的最短距离, 简称为轨距离.

2) 对于任给内点 $t \in C_0$, 其轨道型皆为 G/T , 但是对于任给的边界点 $t \in \partial \bar{C}_0 = \bar{C}_0 \setminus C_0$, 则其轨道的维数恒小于 $\dim G/T$, 所以所有非 G/T 型轨道的并集, 即

$$G(\partial \bar{C}_0) = \bigcup_{x \in \partial C_0} G(x)$$

的测度为零. 换句话说, 在 G 上求积分时, 上述子集 $G(\partial \bar{C}_0)$ 可以略去不计, 只要在 $G(C_0)$ 上计算之即可.

3) 令 t 为 C_0 上的一个动点, $m = \dim G/T = \dim G - \dim T$, 则 $G(t)$ 为 $G(t)$ 型的轨道, 而它的 m 维体积就是一个以 C_0 为其定义域的函数, 称之为(主型)轨体积函数, 记为 $v(t)$. 因为每个轨道 $G(t)$ 都是同样的 G/T 型齐性黎曼空间, 所以它们的体积之比就等于其体积元素之比. 我们可以取定一个基准的 G/T 型齐性黎曼空间, 对于每一个 G/T 型轨道 $G(t)$, 把陪集 $g \cdot T$ 映射到 $g(t)$ 就是一个同型的齐性黎曼空间之间的 G -等变映射 E_t :

$$E_t: G/T \rightarrow G(t),$$

$$G \cdot T \mapsto g(t) = gtg^{-1},$$

则上述两者的“体积元素”之比也就是上述映射 E_t 的 Jacobi 行列式, 亦即 E_t 在基点的切空间所诱导的线性映射的行列式. 这就是说, 所要求去的体积函数 $v(t)$ 可以由下式来计算之:

$$v(t) = c \cdot \det(dE_t|_0),$$

其中 c 是一个待定的比例常数, 而 $dE_t|_0$ 是基点的切空间上的线性映射

$$dE_t|_0: \bigoplus \sum_{\alpha \in \Delta^+} R_{\frac{1}{2}\alpha}^2 \rightarrow \mathcal{F}_0(G(t)).$$

4) 因为 E_t 是 G -等变的, 所以 $dE_t|_0$ 是 T -等变的(因为基点是在 T 的作用之下的不动点). 因此 $dE_t|_0$ 可以分解为下述二维 T -不变子空间的线性映射的直和:

$$dE_t|_{0, \sigma}: R_{\frac{1}{2}\sigma}^2 \rightarrow \mathcal{F}_\sigma(G(t)).$$

所以就可以用下式来计算 $\det(dE_t|_0)$:

$$\det(dE_t|_0) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \det(dE_t|_{0,\alpha}).$$

另一方面, $\det(dE_t|_{0,\alpha})$ 又是和 $G_\alpha/T_\alpha = \tilde{G}_\alpha \cong S^1$ 中的 S^1 -型(主)轨体积函数成比例者, 即可以运用下面的图解:

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha/T & \xrightarrow{E_{t,\alpha}} & G_\alpha(t) \subset G_\alpha/t_\alpha = \tilde{G}_\alpha \\ \cap & & \cap \\ G/T & \xrightarrow{E_t} & G(t) \subset G \end{array}$$

$\det(dE_t|_{0,\alpha})$ 的计算又归于 \tilde{G}_α 中 S^1 -型的体积函数(由于 \tilde{G}_α 或与 S^1 同构, 或与 $SO(3)$ 同构, 所以 \tilde{G}_α 与 S^1 有相同的体积元素, 从而在上述问题中可以视 \tilde{G}_α 是 S^1), 这种体积函数在前面已讨论过, 于是我们有

$$\det(dE_t|_{0,\alpha}) = c' \cdot \sin^2 \pi(\alpha, H),$$

其中 H 满足 $t = \exp H$ (注意, S^1 的正根是 2θ), 综合上面各式, 得出

$$v(\exp H) = c'' \cdot \prod_{\alpha \in \Delta^+} \sin^2 \pi(\alpha, H) = c \cdot |\tilde{Q}(\exp H)|^2,$$

其中

$$\tilde{Q}(\exp H) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (e^{n(\alpha, H)} - e^{-n(\alpha, H)}).$$

5) 最后我们要证明上式中的 $\tilde{Q}(\exp H) = Q(\exp H)$.

证明 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ 是对于 Weyl 房 C_0 来说的素根系, 则由反射对称的定义可知, $r_{\alpha_i}(\alpha_i) = -\alpha_i$, 这相当于被 $\langle \alpha_i, \cdot \rangle^\perp$ 所划分出的两个半空间正负侧选取的改变, 它自然对于其他正根 α 所对应的, 由 $\langle \alpha, \cdot \rangle^\perp$ 所划分的两个半空间正负侧选取无影响, 所以在 r_{α_i} 下 $\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$ 仍变为 $\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$, 于是有

$$r_{\alpha_i}(\Delta^+) = (\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}) \cup \{-\alpha_i\} \quad (1 \leq i \leq k).$$

上式也可由 r_{α_i} 的表达式出发通过直接计算反正根是素根系非负整线性组合这个事实给出一个代数的证明.

设 $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$, 由上式可知, $r_{\alpha_i}(\delta) = \delta - \alpha_i$, 且

$$r_{\alpha_i}(\delta) = \delta - \frac{2 \langle \delta, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

因此

$$\frac{2 \langle \delta, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = 1.$$

又由 $\tilde{Q}(\exp H)$ 的表达式及前式马上推知,

$$\tilde{Q}(\text{Exp}_{\sigma}(H)) = (-1) \cdot \tilde{Q}(\text{Exp}H).$$

因此,对 W 的作用来说, $\tilde{Q}(\text{Exp}H)$ 是一个奇函数,亦即

$$\tilde{Q}(\text{Exp}\sigma H) = \text{sign}(\sigma) \cdot \tilde{Q}(\text{Exp}H), \sigma \in W,$$

其中 $\text{sign}(\sigma)$ 就是 σ 作为 ξ 上正交变换的行列式的符号. 在 $\tilde{Q}(\text{Exp}H)$ 的展开式中有一个主导项, 就是 $e^{2n(d, H)}$, 由上式可知, 在 $\tilde{Q}(\text{Exp}H)$ 的展开式中就应包含所有的项 $\text{sign}(\sigma) \cdot e^{2n(d, H)}$ ($\sigma \in W$). 在它的展开式中不可能含有其他的项了, 因此只能是

$$\tilde{Q}(\text{Exp}H) = Q(\text{Exp}H).$$

6) 设 f 为定义在 G 上的任一中心函数, 在求积分 $\int_G f(g) dg$ 时, 我们先沿着 G -轨道求积. 因为 f 在每个 G -轨道 $G(t)$ 上都取等值, 所以有

$$\begin{aligned} \int_G f(g) dg &= \int_{G_0} f(t) v(t) dt \\ &= \frac{1}{|W|} \int_T f(t) v(t) dt = \frac{c}{|W|} \int_T f(t) |Q(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

其中 c 是一个待定常数, $|W|$ 是 W 的阶数 (T 被分隔成 $|W|$ 个 Weyl 房), 再将 $f(g) = 1$ 的情形代入上式, 就容易确定上述待定常数必为 1.

问题 7.8

1. 求证: 环群的非平凡实不可约表示一定是二维的.
2. 设 G 是一个紧致连通 Lie 群, T 是它的一个极大子环群, $Z(G)$ 是 G 的中心, 求证:
 - (1) $G = \bigcup_{q \in G} qTq^{-1}$.
 - (2) $Z(G) = \bigcap_{q \in G} qTq^{-1}$.
3. 求证: 设 D 是 Lie 代数 \mathfrak{g} 上的导子, 则

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, D^k[X, Y] = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} [D^i X, D^j Y], k = 0, 1, 2, \dots$$
4. 设 φ_k 是在第一章 §4 所定义的 S^3 的 $(k+1)$ 维复不可约表示, 求证

$$\Omega(\varphi_k) = \{k\theta, (k-2)\theta, \dots, -(k-2)\theta, -k\theta\}.$$
5. 设 $W(S^3)$ 表示 S^3 的 Weyl 群, 求证 $W(S^3) = Z_2$.
6. 设 Λ_{φ} 是紧致连通 Lie 群 G 的复不可约表示 φ 的最高权, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ 是 G 的根系 $\Delta(G)$ 在同一次序下的素根系, 求证: $\frac{2(\Lambda_{\varphi}, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = q_i$ 均为非负整数.

参考文献

1. 聂灵沼, 丁石孙. 代数学引论. 北京: 高等教育出版社, 1988
2. 万哲先. 代数和编码(修订版). 北京: 科学出版社, 1980
3. 熊全淹. 近世代数. 武汉: 武汉大学出版社, 1984
4. 张端明, 钟志成. 应用群论导引. 武汉: 华中理工大学出版社, 2001
5. 项武义等. 李群讲义. 北京: 北京大学出版社, 1992
6. Jacobson N. Basic Algebra. New York: W. H. Freeman and Company, 1985
7. Kuczowski J E, Garting J L. Abstract Algebra, a First Look. New York and Basel: Marcel Dekker, 1977
8. Shafarevich I R. Basic Notions of Algebra, Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 1990
9. Nikulin V V, Shafarevich I R. Geometries and Groups. Beijing: Springer-Verlag, World Publishing Corporation, 1989
10. Cox D, Little J, O'Shea D. Ideals, Varieties and Algorithms—An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. New York: Springer-Verlag, 1992